ГЛАВА I.

ВЕКТОРЫ.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ.

1. Скалары. Некоторые физические величины вполне определяются *одним числом*, выражающим *отношение* рассматриваемой величины к выбранной нами единице измерения.

Так, например: объем в 5 cm^3, масса в 10 g, время — 12 *sec.*, энергия — 0,25 джоуль, температура — 37° С, количество электричества — 0,001 кулон, разность потенциалов — 200 вольт и т. д.

Подобные величины называются *скаларами.*

Само собою разумеется, что *число*, определяющее данный скалар, зависит от выбранной единицы измерения. Чем *единица* больше, тем *число* меньше и наоборот. Так, например: джоуль в 10^7 раз больше эрга, а потому

$$0{,}25 \text{ джоуль} = 0{,}25.10^7 \text{ эрг.}$$

Некоторые скалары всегда положительны (объем, масса), другие бывают и положительными, и отрицательными (температура, электричество). В последнем случае нужно условиться относительно *нуля* для рассматриваемых скаларов и относительно знака их. Так, например: за начало счета или за „нуль“ температур принимают температуру тающего льда при атмосферном давлении. Все температуры выше нуля (более теплые тела) принято считать положительными, температуры же ниже нуля — отрицательными. Подобным же образом, электричество натертого янтаря уже давно принято считать отрицательным, а потому и электроны мы должны считать заряженными отрицательно, а ядро атома — положительно. Все это имеет лишь условное значение; но условиться необходимо.

Скалары можно складывать и перемножать; вообще, с ними можно производить любые алгебраические операции, как с обыкновенными *алгебраическими* величинами.

2. Векторы. Кроме скаляров в физике встречаются еще такие величины, для полного определения которых указания одного числа бывает недостаточно. Так, например, величина прямолинейного смещения точки в 2 *cm* не вполне характеризует это перемещение; необходимо еще указать, куда, в каком *направлении* переместилась точка: вверх, вниз, на север, на восток, или как-нибудь иначе. Смещение точки и ему подобные величины в физике называются *векторами*.

Прямолинейное смещение точки обладает еще следующим важным свойством. Представим себе, что точка переместилась по линии OA (рис. 1), а затем по линии AB. Оба эти смещения вместе привели точку в B и, следовательно, по своему результату эквивалентны одному смещению OB. Но OB есть *геометрическая сумма* смещений OA и AB. Таким образом, в противоположность *скалярам*, которые складываются *алгебраически*, *векторы* складываются *геометрически*.

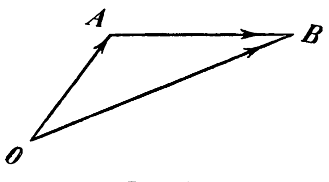


Рис. 1.

Перемещение точки, скорость, ускорение, сила, напряжение поля и т. п.— все это суть векторы. Масса в один килограмм — скалар, сила в один килограмм — вектор.

Как видим, каждый вектор содержит в себе и скалярную часть, а именно: *единицу измерения* и *число*. Поэтому, если даны векторы одного направления, то с ними можно обращаться, как со скалярами.

Необходимо, однако, заметить, что не всякая величина в физике, для которой даны единица измерения, число и направление в пространстве, представляет собою вектор. Так, например, две силы, величины и направления которых изменяются при *совместном* действии, могут дать результат, отличный от простого геометрического сложения; для их сложения недостаточно знать величину и направление каждой силы в отдельности, а необходимо еще знать их зависимость друг от друга.

Далее, как увидим ниже, углы поворота твердого тела характеризуются тоже некоторым *числом* и *направлением*, но они не складываются геометрически, а потому мы их не будем называть векторами. Но, хотя углы поворота не векторы, тем не менее, как увидим ниже, бесконечно малые углы и угловые скорости суть векторы.

Итак, *векторами* мы будем называть такие физические величины, которые при выбранной единице измерения определяются *числом* и *направлением* и которые складываются *геометрически.*

Когда мы познакомимся с физическими величинами более высокого порядка, чем векторы, — с так называемыми *тензорами*, то отличительные свойства векторов нам станут более ясными.

3. Изображение векторов. Типичным вектором будет нам всегда служить вектор прямолинейного смещения точки. Поэтому любой другой физический вектор — скорость, силу, напряжение поля — мы часто будем изображать в виде отрезков прямых линий. *Длина* этих отрезков, при некотором определенном масштабе, будет представлять собою *скалярную* часть вектора, а *направление* отрезка мы будем брать параллельно направлению вектора. Но, так как каждый отрезок прямой OA имеет два направления: OA и AO, то при изображении вектора необходимо еще указать направление вектора вдоль по отрезку. Это можно сделать при помощи стрелки, или соответственною расстановкою букв или цифр, или каким-либо другим способом. Положим, что мы условились изображать силу в 1 dyn длиною в 1 *cm*. В таком случае OA (рис. 2) будет изображать по величине и по направлению силу в 3,2 dyn. Силы OA и Oa, приложенные к точке O, одинакового направления, но разной величины. Силы OA и OB — одинаковой величины, но разных направлений. Наконец, сила OC отличается от предыдущих и по величине и по направлению.

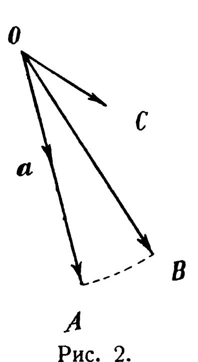


Рис. 2.

Правда, изображать векторы отрезками и производить над ними графические построения в особенности удобно тогда, когда все данные векторы расположены параллельно одной плоскости, которую мы и можем принять за плоскость чертежа. Однако и в общем случае бывает очень полезно представлять себе векторы в пространстве в виде прямых отрезков определенной длины и определенного направления и производить над этими векторами мысленно различные геометрические построения. Уменье мыслить *пространственно* крайне важно как для физика, так и для инженера. Наконец, для графических построений можно векторы, распределенные в пространстве, проектировать на плоскость, как это делается в начертательной геометрии.

4. Обозначение векторов. Впрочем, *геометрические* построения в пространстве можно заменить *алгебраическими* действиями над проекциями векторов на какие-либо оси координат. Так поступают, например, в аналитической геометрии и в аналитической механике. Но со времени изобретения *векторного исчисления* мы имеем возможность производить вычисления, вполне аналогичные алгебраическим, непосредственно над самими векторами, а не над их проекциями, и получать результаты, независимые от выбора той или иной системы координат. Это последнее обстоятельство имеет немаловажное значение для исследования физических явлений. Кроме того, векторное исчисление часто значительно упрощает вычисления и представляет их в более наглядной форме. Ввиду этого полезно с ним ознакомиться; и это тем более, что векторное исчисление уже вошло в обиход современных учебников и современных научных работ по теоретической физике.

Условимся обозначать векторы большими или малыми прямыми буквами *жирного* латинского шрифта, тогда как для скаларов оставим *обыкновенный* курсив. Так, например:

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{R},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{r}$$

будут изображать у нас векторы и по величине и по направлению, тогда как

$$A,\ B,\ R,\ a,\ b,\ r$$

будут у нас скаларные величины тех же векторов.

В Германии принято векторы обозначать готическим шрифтом.

5. Сложение векторов. Мы уже сказали, что векторы складываются *геометрически*. Условимся обозначать сумму двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ таким образом:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

Это означает, например, следующее:

Пусть точка O (рис. 3) должна совершить два перемещения, которые даны векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$; каково будет результирующее перемещение точки?

Изобразив на чертеже отрезком OA вектор $\mathbf{A}$, отложим от конца этого вектора отрезок AC, равный и параллельный вектору $\mathbf{B}$, т.-е. отрезку OB. После двух таких перемещений точка O перейдет в C, и, следовательно, *результирующее* ее перемещение из O в C будет изображаться отрезком OC или вектором $\mathbf{C}$.

Итак, вышенаписанное векторное равенство означает, что **C** представляет собою *геометрическую* сумму векторов **A** и **B**.

Заметим, что если

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C},$$

то вообще

$$A+B>C$$

и только тогда, когда **A** и **B** одного направления,

$$A+B=C.$$

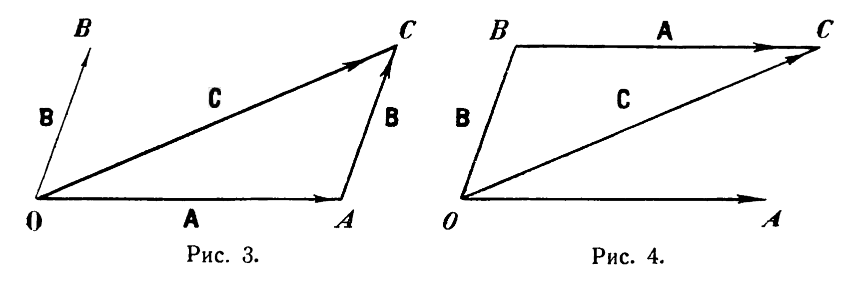


Рис. 3. Рис. 4.

Рассматриваемая нами точка O могла бы сперва переместиться по OB (рис. 4), а затем по BC; результирующее перемещение было бы тоже OC.

Значит, можно написать

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

Наконец, смещения **A** и **B** можно себе представить происходящими одновременно, например, в одну секунду; тогда **A** и **B** могут изображать средние скорости рассматриваемых смещений, а **C** будет *результирующая* средняя скорость движения.

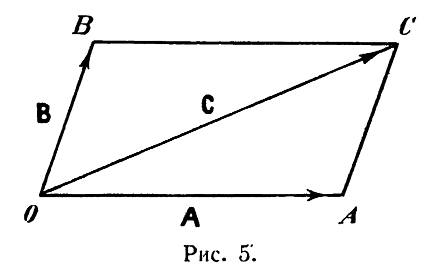


Рис. 5.

Мы можем поэтому сказать, что результирующий вектор **C** (рис. 5) представляет собою по величине и по направлению (см. стрелки) диагональ параллелограмма, построенного на векторах **A** и **B** (*правило параллелограмма*).

Как видим, векторы приходится иногда переносить параллельно самим себе: на рис. 3 мы поступили так с вектором **B**. Поэтому

условимся считать равными векторы, которые можно совместить *параллельным* перемещением.

6. Перемена знака вектора. Пусть точка O прошла путь OA и затем прошла обратно по AO в прежнее положение O (на рис. 6 оба пути нарисованы для наглядности не совпадающими). Очевидно, что результирующее смещение точки равно нулю. Как и в скалярной алгебре, две величины, дающие в сумме нуль, нужно считать противоположных знаков. Будем это обозначать так:

Рис. 6.

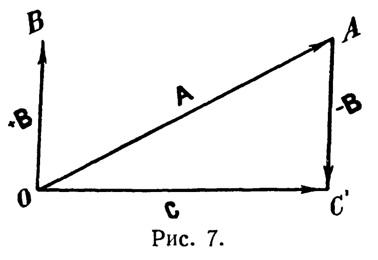


Рис. 7.

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = 0.$$

Заметим, что при перемене знака вектора *скалярная* величина его остается положительной, только *направление* вектора меняется на противоположное.

7. Вычитание векторов. Положим теперь, что даны два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (рис. 7), и требуется определить их разность

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}'.$$

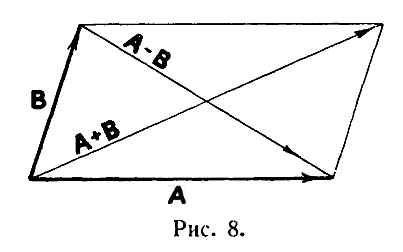


Рис. 8.

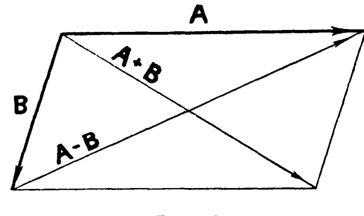


Рис. 9.

Для этого построим вектор $\mathbf{A}$ (рис. 7) и от конца его A отложим вектор, равный и противоположный вектору $\mathbf{B}$, т.-е. AC'; тогда отрезок OC' и будет изображать искомый вектор $\mathbf{C}'$.

Наше равенство можно написать и так

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{C}',$$

а это означает, что вычитание векторов эквивалентно сложению с переменою знака, как в алгебре.

8. Пример. Из рисунка 8 легко видеть, что в параллелограмме, построенном на векторах **A** и **B**, одна диагональ равна сумме, а другая диагональ равна разности этих двух векторов.

Насколько важно обозначать векторы стрелками, видно из рисунка 9, где построен *тот же* параллелограмм, но обозначения $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ поменялись местами. Объясняется это просто тем, что вектор **B** здесь имеет направление противоположное, чем на рис. 8.

9. Сложение и вычитание трех векторов. Пусть даны три вектора **A**, **B** и **C** (рис. 10), изображенные отрезками OA, OB, OC, которые могут и не лежать в одной плоскости.

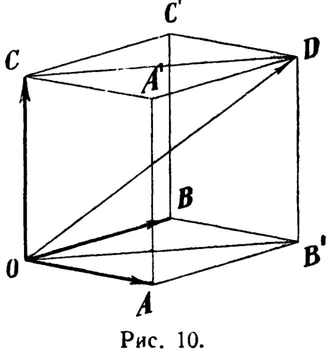


Рис. 10.

Докажем, что сумма этих трех векторов равна вектору $\mathbf{D}=OD$, представляющему собою диагональ параллелепипеда, построенного на векторах **A**, **B** и **C**.

Действительно, складывая сперва векторы **A** и **B**, получаем их сумму в виде диагонали OB' параллелограмма $OAB'B$; а, приложив к OB' еще третий данный вектор $\mathbf{C}=OC$, получаем $\mathbf{D}=OD$, как диагональ параллелограмма $OB'DC$.

Итак, мы можем написать векторное равенство

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{D}.$$

При нашем сложении мы шли по пути $OAB'D$ и замкнули этот пространственный четыреугольник результирующим вектором OD. Но с тем же правом мы могли пойти по пути $OBC'D$ и с тем же результатом, т.-е. замыкающая сторона была бы опять OD.

Однако для пути $OBC'D$ мы должны написать векторное равенство в таком виде:

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{A}=\mathbf{D}.$$

Наконец, идя по пути $OAA'D$, мы получили бы

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{A}=\mathbf{D}.$$

Как видим, векторная (геометрическая) сумма так же не зависит от порядка сложения, как и скалярная (алгебраическая) сумма.

Советуем читателю для упражнения доказать, что

$$AC' = -\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C};$$
$$BA' = \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C};$$
$$CB' = \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}.$$

Из того же параллелепипеда непосредственно следует, что

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{D} - \mathbf{C};$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{D} = 0.$$

Отсюда заключаем, что векторы тоже можно переносить из одной части векторного равенства в другую с переменою знака, как это делается и в алгебраических равенствах.

Если сумма нескольких векторов равна нулю, то это значит, что они образуют замкнутый многоугольник.

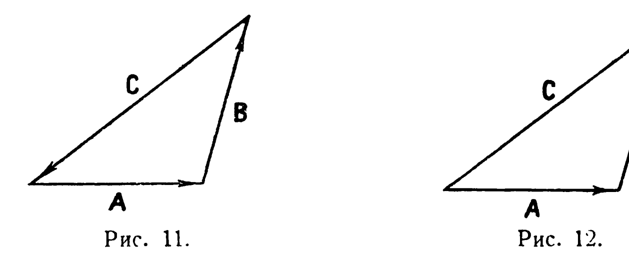


Рис. 11. Рис. 12.

Если сумма трех векторов равна нулю, то они образуют замкнутый треугольник и, следовательно, лежат в одной плоскости или могут быть перенесены в одну плоскость параллельным перемещением *(компланарны)*.

Уравнение треугольника (рис. 11) будет

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0,$$

между тем как для треугольника (рис. 12) и (рис. 3) имеем

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} = 0.$$

Образуя подобные уравнения, т.-е. суммируя по замкнутому контуру, можно итти в любом направлении, но необходимо брать векторы со знаком $+$ (плюс), если направление пути совпадает с направлением данного вектора (см. стрелки); если же направление пути противоположно направлению вектора, то берут вектор со знаком — (минус).

10. Общие правила. Полученные нами для трех векторов результаты мы можем обобщить на случаи скольких угодно векторов и установить следующие общие правила.

а) Сумма нескольких векторов есть вектор, представляющий собою замыкающую сторону векторного многоугольника, составленного из всех слагаемых векторов. При этом начало каждого вектора совпадает с концом предыдущего вектора, а результирующий вектор направлен от начала первого вектора к концу последнего.

б) Сумма векторов не зависит от порядка сложения.

в) Перемена знака вектора означает перемену его направления на противоположное, без изменения его скалярной величины.

г) Вычитание эквивалентно сложению с переменою знака.

д) Векторное равенство не нарушается от прибавления к обеим частям его по одинаковому вектору.

е) В векторном уравнении можно переносить любой член из одной части в другую с переменою знака.

11. Произведение скаляра на вектор. Символ $a\mathbf{A}$ означает вектор то́го же направления, что и $\mathbf{A}$, но скалярная величина которого в a раз больше, чем у вектора $\mathbf{A}$. При этом мы можем писать множитель a перед вектором или за ним:

$$a\mathbf{A} = \mathbf{A}a.$$

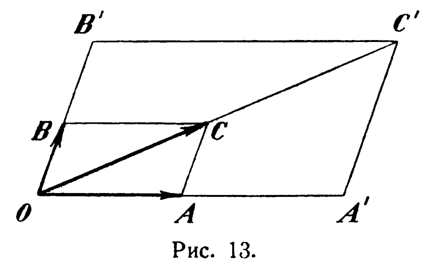


Рис. 13.

На рис. 13 нарисованы два параллелограмма $OACB$ и $OA'C'B'$, при чем у второго — все линейные размеры в a раз больше, чем у первого. Диагонали обоих параллелограммов должны, конечно, совпадать, если стороны OA и OB совпадают со сторонами OA' и OB'. Отсюда легко заключить, что если

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

то

$$a\mathbf{A} + a\mathbf{B} = a(\mathbf{A} + \mathbf{B}).$$

Итак, произведение скаляра на вектор обладает свойствами, вполне аналогичными свойствам обыкновенных алгебраических произведений.

а) Свойство

$$a\mathbf{A} = \mathbf{A}a$$

называется *пермутативностью* (перестановка).

б) Свойство

$$a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$$

называется *дистрибутивностью* (распределение множителя на отдельные члены).

Заметим, однако, сейчас же, что не все векторные операции обладают этими свойствами, как об этом подробнее будет сказано ниже.

12. Единичный вектор. Единичным вектором называется вектор, скаларная величина которого равна выбранной единице. Обозначая единичный вектор знаком $\mathbf{A}_1$, мы можем любой вектор $\mathbf{A}$ представить как произведение единичного вектора $\mathbf{A}_1$ на скаларную величину A данного вектора. Таким образом,

$$\mathbf{A}=A\mathbf{A}_1.$$

Единичные векторы часто употребляются для обозначения направления какой-либо линии, или — как ее называют в таких случаях — *направления оси*, по которой еще не отложены векторы.

13. Проекция вектора на ось. Как известно, под проекцией длины A вектора на какую-либо ось $\mathbf{s}$ подразумевают величину $A\cos(As)$, где (As) означает угол между направлением вектора $\mathbf{A}$ и оси $\mathbf{s}$. Но из рис. 14 мы видим, что $\cos(As)$ может считаться и положительным и отрицательным, смотря по тому, будем ли мы за угол между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{s}$ считать угол α или угол β. Поэтому, во избежание неопределенности, необходимо в каждом случае условиться относительно *направления* оси, на которую проектируется вектор, и на чертеже указывать стрелками как направление вектора $\mathbf{A}$, так и направление оси $\mathbf{s}$.

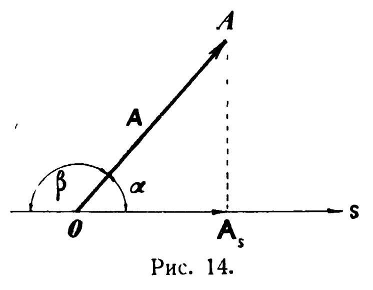


Рис. 14.

Проекция вектора $\mathbf{A}$ на ось есть *вектор*, скаларная величина которого равна $A\cos(As)$ и направление которого совпадает с $\mathbf{s}$.

Мы будем иногда обозначать скаларную часть проекции вектора $\mathbf{A}$ на ось $\mathbf{s}$ через

$$A_s=A\cos(As),$$

а самый вектор

$$\mathbf{A}_s=A\cos(As)\mathbf{s}_1.$$

У некоторых авторов величина проекции, т.-е. *скалар* A_s, обозначается тем же шрифтом, что и самый вектор $\mathbf{A}_s$.

14. Проекция уравнения на ось. Представим себе в пространстве два вектора **A** и **B** (рис. 15) и сумму их

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

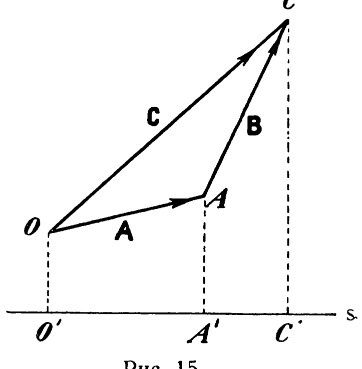


Рис. 15.

Проекции этих векторов на ось s будут соответственно

$$\mathbf{A}_s=O'A',$$
$$\mathbf{B}_s=A'C',$$
$$\mathbf{C}_s=O'C'.$$

Из чертежа видно, что

$$\mathbf{A}_s+\mathbf{B}_s=\mathbf{C}_s.$$

или также

$$A_s+B_s=C_s.$$

Обобщая этот результат на случай скольких угодно векторов, получаем теорему: проекция суммы нескольких векторов на какую-либо ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось.

Или иначе: *в векторном уравнении* можно всем членам его приписать значки любой оси *s* и обратить его, таким образом, *в скаларное уравнение.*

15. Метод координат. Очень часто векторы задаются не непосредственно, а величиною своих проекций на оси координат. В большин-

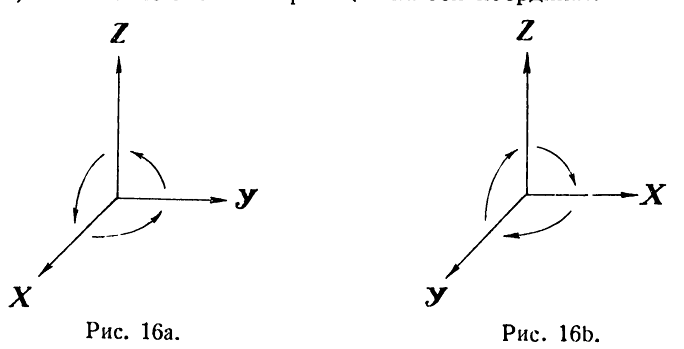


Рис. 16a. Рис. 16b.

стве случаев пользуются *прямолинейною*, *прямоугольною* системой координат; будем ее называть „декартовой“ или „картезианской“.

Различают две декартовы системы координат. В одной из них (рис. 16a) направления осей выбраны так, что если ввинчи-

вать буравчик по оси $+Z$, то надо его ручку поворачивать от оси $+X$ к $+Y$, как показано на рис. 16а. Точно так же, ввинчивая по оси $+X$, мы должны ручку повернуть от $+Y$ к $+Z$, а ввинчивая по $+Y$ — повернуть от $+Z$ к $+X$; круговой порядок букв $XYZX$ остается при этом неизменным. Эта система называется *право-винтовою* системою.

В противоположность этой системе, в *лево-винтовой* системе (рис. 16b) оси расположены так, что поворот ручки буравчика

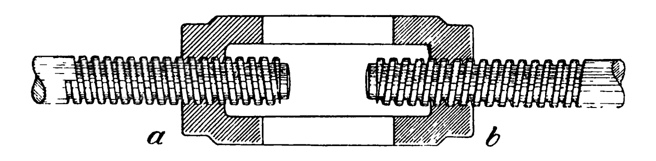


Рис. 17

от $+X$ к $+Y$ ввинчивает его по $-Z$ и т. д. Советуем читателю на какой-нибудь модели самому убедиться в том, что лево-винтовая система никакими поворотами не может быть приведена в совпадение с право-винтовою системой. Обе системы *существенно* отличаются друг от друга совершенно так же, как отличны друг от друга два винта один с правой (рис. 17 *a*) и другой с левою нарезкою (рис. 17 *b*).

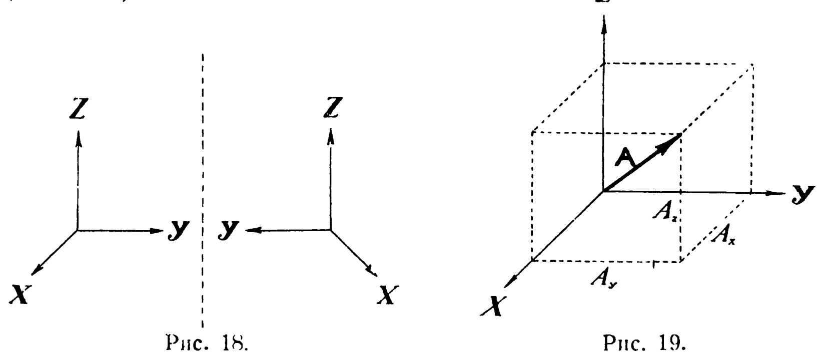


Рис. 18. Рис. 19.

Право-винтовую систему можно обратить в лево-винтовую, если переменить направление *одной* из осей на противоположное или переменить направление всех *трех* осей. При перемене знаков *двух* осей система остается того же рода.

При зеркальном изображении (рис. 18) одна система превращается в другую.

Мы будем пользоваться *исключительно право-винтовою системою.*

Для проекций какого-либо вектора **A** на декартовы оси координат мы имеем следующие соотношения, как это видно из рисунка 19:

$$A_x = A\cos(AX)$$
$$A_y = A\cos(AY)$$
$$A_z = A\cos(AZ)$$
$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$
$$A = A_x\cos(AX) + A_y\cos(AY) + A_z\cos(AZ);$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z.$$

Последнее равенство можно толковать так: любой вектор равен сумме своих проекций на оси координат.

Это последнее положение верно и при косоугольных координатах.

16. Преобразование картезианских координат. Проектируем вектор и все его уравнение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$

на новые картезианские оси координат X', Y', Z' с тем же началом. Тогда мы получаем (стр. 11, **14**) три скалярных уравнения

$$A_{x'} = A_{xx'} + A_{yx'} + A_{zx'} = A_x\cos(XX') + A_y\cos(YX') + A_z\cos(ZX')$$
$$A_{y'} = A_{xy'} + A_{yy'} + A_{zy'} = A_x\cos(XY') + A_y\cos(YY') + A_z\cos(ZY')$$
$$A_{z'} = A_{xz'} + A_{yz'} + A_{zz'} = A_x\cos(XZ') + A_y\cos(YZ') + A_z\cos(ZZ').$$

Это суть формулы преобразования для проекций вектора **A** при переходе от одной системы декартовых координат к другой.

Сравнивая эти формулы с формулами преобразования координат какой-либо точки (x, y, z)

$$x' = x\cos(xx') + y\cos(yx') + z\cos(zx')$$
$$y' = x\cos(xy') + y\cos(yy') + z\cos(zy')$$
$$z' = x\cos(xz') + y\cos(yz') + z\cos(zz'),$$

мы видим, что они вполне аналогичны.

Впрочем этого следовало ожидать, потому что координаты точки x, y и z сами суть проекции на оси координат вектора, а именно *радиуса-вектора* **r**, проведенного из начала в эту точку.

Это свойство *радиуса-вектора* может служить для определения понятия *вектора* вообще, и мы впоследствии еще встретимся с этим определением.

2. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

17. Скалярное произведение. Как известно, работа силы $\mathbf{F}$ по пути $\mathbf{s}$ определяется произведением силы на путь и на cos угла между ними.

Подобные произведения двух векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{s}$ часто встречаются в физике.

Работа W есть скалар, а потому и само произведение $Fs\cos(Fs)$ называется *скалярным.*

Мы будем обозначать скалярное произведение двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, ставя буквы рядом, или разъединяя их точкою, или заключая их в круглые скобки; вообще — как принято обозначать произведения двух скаларов. Только шрифт векторных букв будет нам указывать на то, что нужно помножить еще на cos угла между векторами. Так, например:

$$W = \mathbf{AB} = \mathbf{A} \, . \, \mathbf{B} = (\mathbf{AB}) = AB\cos(AB).$$

Из нашего определения скалярного произведения непосредственно следует, что если оба вектора параллельны ($\cos(AB) = 1$), то

$$(\mathbf{AB}) = AB.$$

Точно так же

$$(\mathbf{A})^2 = A^2.$$

Если же оба вектора перпендикулярны друг к другу ($\cos(AB) = 0$), тогда и скалярное их произведение равно нулю

$$(\mathbf{AB}) = 0.$$

Справедливо и обратное заключение: если $(\mathbf{AB}) = 0$, но $\mathbf{A} \neq 0$ и $\mathbf{B} \neq 0$, то $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

Так как

$$\cos(AB) = \cos(BA),$$

то очевидно

$$(\mathbf{AB}) = (\mathbf{BA})$$

(пермутативность).

Далее, скалярное произведение можно рассматривать как проекцию одного из векторов, например **A**, на направление другого вектора **B**, и притом увеличенную в B раз, или наоборот:

$$(\mathbf{AB}) = A_B B = AB_A,$$

а так как проекция суммы равна сумме проекций (стр. 11, **14**), то можем написать:

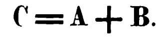
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = A(B+C)_A = AB_A + AC_A = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

(дистрибутивность).

Значит с векторами в скалярном произведении можно обращаться по известным правилам скалярной алгебры.

Мы можем воспользоваться этим для вывода целого ряда теорем геометрии.

18. Примеры. На рисунке 20 мы имеем



$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

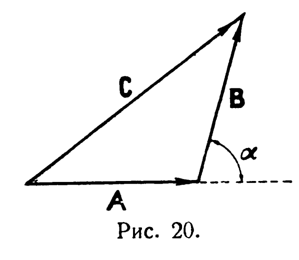


Рис. 20.

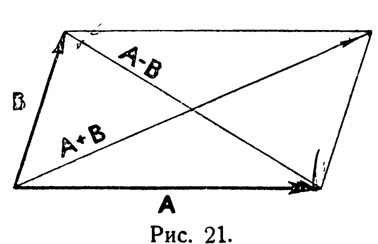


Рис. 21.

Возведя это равенство в квадрат, т.-е. умножая скалярно само на себя, имеем

$$\mathbf{C}^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\,(\mathbf{AB}) + \mathbf{B}^2,$$

или, переписывая его в скалярной форме:

$$C^2 = A^2 + 2\,AB\cos(AB) + B^2,$$

получаем известную теорему о квадрате стороны треугольника.

Если **A** перпендикулярно к **B**, то $(\mathbf{AB}) = 0$, и мы имеем теорему Пифагора

$$\mathbf{C}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2.$$

Далее, для диагоналей параллелограмма имеем (рис. 21):

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = 2\,(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2),$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 - (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = 4\,(\mathbf{AB}),$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

Первое равенство означает, что сумма квадратов, построенных на диагоналях любого параллелограмма, равна сумме квадратов, построенных на его четырех сторонах.

Второе равенство говорит, что разность квадратов диагоналей параллелограмма равна учетверенному произведению двух смежных сторон на cos угла между ними.

Для ромба $A = B$; тем не менее $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ не равно нулю, потому что эти два вектора имеют разные направления.

Из последнего равенства, в котором для ромба надо положить $A^2 = B^2$, мы видим, что в ромбе обе диагонали перпендикулярны друг к другу.

19. Скалярное произведение в декартовых координатах. Разложим два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ по осям координат X, Y, Z и составим их скалярное произведение. Каждый из векторов можно рассматривать как геометрическую сумму его проекций на оси координат (стр. 11, 15), а потому можем написать:

$$(\mathbf{AB}) = (\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z)(\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y + \mathbf{B}_z).$$

При перемножении и раскрытии скобок надо иметь в виду, что проекции на разные оси перпендикулярны друг к другу и дают в скалярном произведении нуль: например $\mathbf{A}_y\mathbf{B}_z = 0$ и т. д. Поэтому из девяти членов произведения останутся только три, которые можно написать и скалярно:

$$(\mathbf{AB}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.$$

Если принять $A = B = 1$, тогда получаем

$$\cos(AB) = \cos(AX)\cos(BX) + \cos(AY)\cos(BY) + \cos(AZ)\cos(BZ).$$

Это — известное из аналитической геометрии выражение для cos угла между двумя линиями в пространстве.

20. Пример. Применим понятие о скалярном произведении к выводу уравнения плоскости в декартовых координатах.

Пусть нам дана некоторая плоскость abc (рис. 22). Опустим из начала координат O на эту плоскость перпендикуляр $OP = \mathbf{p}$; это будет вектор с составляющими p_x; p_y; p_z. Проведем к какой-нибудь другой точке A той же плоскости радиус-вектор $\mathbf{r}$, и пусть его составляющие будут

$$r_x = x; \qquad r_y = y; \qquad r_z = z.$$

Очевидно, что для любой точки этой плоскости проекция вектора **r** на направление нормали *On* будет равна *p*, и мы можем написать

$$\mathbf{r}_p = p,$$

откуда

$$\mathbf{r}_p \cdot p = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = p^2.$$

Это и есть векторное уравнение плоскости.

Чтобы превратить его в обычный вид, обозначим через $\mathbf{p}_1$ единичный вектор по направлению нормали *On*; его проекции на оси координат будут представлять собою не что иное как cos углов, образуемых вектором **p** с этими осями, а именно $\cos(nX)$, $\cos(nY)$, $\cos(nZ)$. Тогда получим по § **19**

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1) = x\cos(nX) + y\cos(nY) + z\cos(nZ) = p$$

— обычное уравнение плоскости.

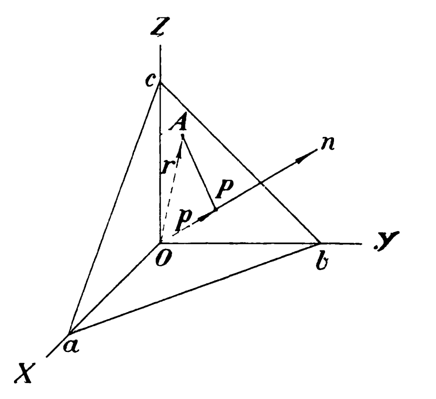


Рис. 22.

Если наша плоскость должна проходить через какую-либо точку, для которой дан радиус-вектор $\mathbf{r}_0$, проведенный из начала координат, или, что все равно, даны координаты x_0, y_0, z_0 этой точки, тогда вектор $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ должен лежать в нашей плоскости и, следовательно, быть перпендикулярен к $\mathbf{p}_1$, скалярное произведение векторов $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{p}_1$ должно равняться нулю:

$$\mathbf{p}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Это выражение представляет собою уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathbf{r}_0$ и перпендикулярной к данному направлению $\mathbf{p}_1$.

В развернутом виде имеем

$$(x - x_0)\cos(nX) + (y - y_0)\cos(nY) + (z - z_0)\cos(nZ) = 0.$$

21. Векторное произведение. На-ряду со *скалярным* произведением векторов **A** и **B**, которое равно $AB\cos(AB)$, в физике часто встречается еще так называемое *векторное произведение*,

величина которого равна $AB \sin(AB)$, т.-е. равна *площади* параллелограмма, построенного на векторах **A** и **B**.

Заметим, что всякая площадь характеризуется не только своею *величиною*, но и своим *направлением* в пространстве; поэтому естественно считать векторное произведение двух векторов $C = AB \sin(AB)$ тоже за вектор.

Каково же направление этого вектора? — Направление *площади* в пространстве можно определить направлением ее *нормали*, а потому и вектор **C** (рис. 23) следует отложить по нормали к площади $OAB'B$. Но здесь мы опять встречаемся с тем обстоятельством, что всякая линия, а следовательно, и нормаль к площади $OAB'B$ имеет *два* направления, и нам необходимо условиться — какое из них принять за положительное, т.-е. за то направление, по которому нужно отложить вектор **C**. — Условимся откладывать вектор **C** так, чтобы векторы **A**, **B** и **C** образовывали *право*-винтовую систему (рис. 23). Это означает, что поворот ручки буравчика от **A** к **B** (по кратчайшему пути) должен сообщить буравчику поступательное движение по **C**.

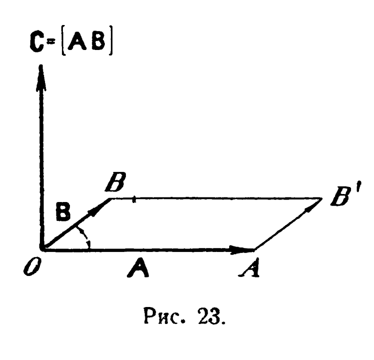


Рис. 23.

Мы выбираем *право*-винтовую систему потому, что у нас оси координат тоже образуют *право*-винтовую систему. При этом площадь, например, четыреугольника xy будет изображаться вектором по оси Z и т. д.

Векторное произведение в отличие от скалярного произведения мы будем обозначать *четыреугольными* скобками (см. рис. 23):

$$\mathbf{C} = [\mathbf{AB}].$$

Из нашего определения векторного произведения непосредственно следует, что если оба вектора параллельны друг другу и $\sin(AB) = 0$, то их векторное произведение равно нулю,

$$[\mathbf{AB}] = 0,$$

даже и в том случае, если ни **A**, ни **B** сами по себе не равны нулю.

Обратно, если $[\mathbf{AB}] = 0$, но $\mathbf{A} \neq 0$ и $\mathbf{B} \neq 0$, то $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ (признак параллельности двух векторов).

Точно также всегда

$$[\mathbf{AA}] = 0.$$

Если же оба вектора перпендикулярны друг к другу — $\sin(AB) = 1$, то величина их векторного произведения, очевидно, равна произведению их скаларных величин AB. Напомним, что при этих условиях скаларное произведение тех же векторов было бы равно нулю (стр. 14, **17**).

Так как $\sin(AB) = -\sin(BA)$, то

$$[\mathbf{AB}] = -[\mathbf{BA}];$$

пермутативность сохраняется, но с переменой знака.

22. Изображение площадей векторами. Часто бывает полезно не только параллелограммы, но и площади другой формы изображать векторами. При этом нужно *величину* площади откладывать по *положительной* нормали к этой площади. Для того чтобы показать, куда у данной площадки направлена положительная нормаль, можно начертить, конечно, эту нормаль, но можно условиться на каждой площадке указывать направление ее контура стрелкою (рис. 24), а нормаль считать направленной так, чтобы контур и положительная нормаль образовывали *право-винтовую* систему. Это означает, что при повороте ручки буравчика по направлению контура, сам буравчик пойдет по *положительной* нормали (рис. 25). Этому условию удовлетворяет и наш параллелограмм (рис. 23) вектора $\mathbf{C}$, у которого контур нужно начинать с вектора $\mathbf{A}$ и итти по $OAB'B$.

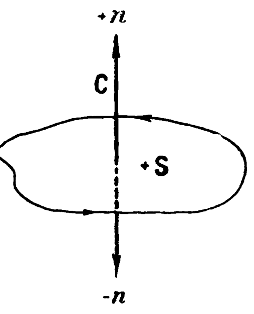


Рис. 24.

Если величину площади считать вектором, отложенным по ее положительной нормали, то проекция вектора $\mathbf{C}$ на какую-либо ось $\mathbf{s}$ будет изображать площадь проекции площадки $\mathbf{S}$ на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{s}$. Действительно, ведь проекция *площади* на *плоскость* получается умножением на cos угла между ними, так же как и проекция вектора на ось; но cos угла между нормалями двух плоскостей всегда равен cos угла между этими плоскостями.

На рис. 25 и 26 одна и та же площадка S, но с противоположными направлениями контуров, проектируется на плоскость XY, а вектор, ее изображающий, проектируется на ось Z.

Условимся ту сторону площадки, из которой *выходит* положительная нормаль, считать *положительной*; а ту сторону, в которую *входит* положительная нормаль, будем считать отрицательной (рис. 25 и 26). На плоскости XY первая площадка имеет *положительную* проекцию, а вторая — *отрицательную*.

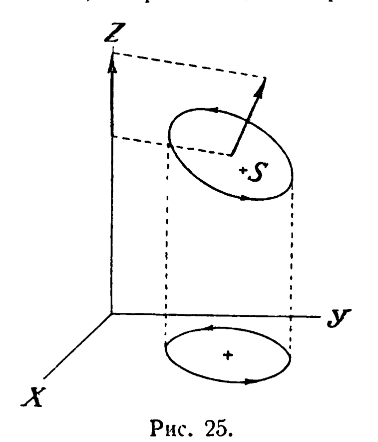


Рис. 25.

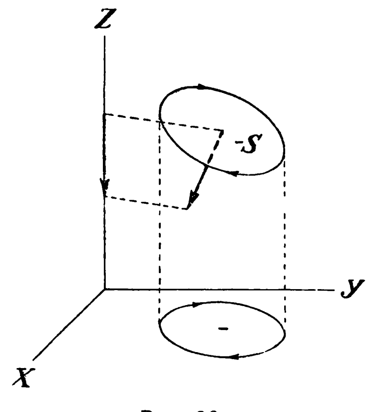


Рис. 26.

Если дана площадка с контуром определенного направления, то изображающий ее вектор тоже вполне определен и по величине и по направлению. Наоборот, если дан вектор, то мы всегда можем приурочить к нему некоторую площадку определенной величины с контуром определенного направления. Но форма площадки при этом не играет роли.

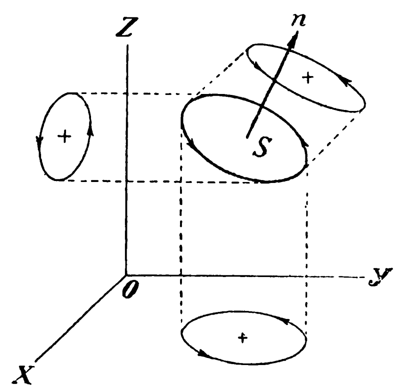


Рис. 27.

23. Сложение и разложение площадок. Всякую площадку $\mathbf{S}$ можно разложить на составляющие площадки, проектируя ее на *плоскости* координат (рис. 27), и мы можем написать:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{yz} + \mathbf{S}_{zx} + \mathbf{S}_{xy},$$

где площадка $\mathbf{S}$ представляет собою геометрическую сумму ее проекций на плоскости координат.

В то же самое время вектор $\mathbf{n}$, изображающий площадку $\mathbf{S}$, разложится по осям координат

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_y + \mathbf{n}_z.$$

Таким путем *плоская* площадка **S** разложилась у нас на три *плоских* площадки, и притом вполне определенным образом. Но если бы, наоборот, мы задались тремя любыми плоскими площадками по плоскостям координат и пожелали бы их сложить, то, вообще говоря, это оказалось бы невозможным: мы можем совсем не получить замкнутого контура. Причина этого лежит в том обстоятельстве, что для каждой точки проекции искомого контура — на плоскостях координат уже даны *две* координаты, и, следовательно, для каждой точки искомого контура даны шесть координат; а этого для трех измерений слишком много. Между тем, складывая три вектора $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$, $\mathbf{n}_z$, изображающих величину данных площадок, мы всегда получим вполне определенный результат, а именно — вектор $\mathbf{n}$.

Как согласовать такое разногласие? — Мы уже обращали внимание на то, что *форма* площадок при их векторном изображении не играет роли, а имеет значение только *величина* их. Поэтому, складывая геометрически три вектора $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ и $\mathbf{n}_z$ и получив вектор $\mathbf{n}$, мы можем приурочить ему площадку *любой* формы; однако величина этой площадки должна равняться **S**, ее нормаль должна быть направлена по $\mathbf{n}$, и контур ее должен образовать с $\mathbf{n}$ правовинтовую систему. Проекции этой площадки на плоскостях координат, вообще говоря, совсем не будут совпадать с заданными нам проекциями ни по форме, ни по положению; тем не менее они будут равны заданным проекциям *по своей величине.*

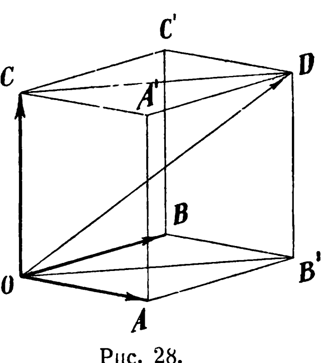


Рис. 28.

Имея это в виду, мы можем складывать любые площадки, как векторы, и под геометрическою суммою нескольких площадок подразумевать площадку, вектор которой равен геометрической сумме векторов слагаемых площадок.

Итак, при геометрическом суммировании площадок их форма не имеет значения.

24. Пример. Представим себе параллелепипед *OABC* (рис. 28). Подобно тому, как диагональ параллелограмма *OB'* (рис. 28) представляет собою геометрическую сумму двух прилежащих сторон *OA* и *OB*, точно так же и диагональная плоскость параллелепипеда *OB'DC*

представляет собою геометрическую сумму двух прилежащих граней $OAA'C$ и $OBC'C$.

В этом легко убедиться, если проектировать грани параллелепипеда на какую-нибудь плоскость, например, на плоскость рис. 28. При этом все грани параллелепипеда будут проектироваться в виде параллелограммов, и площадь проекции диагональной плоскости $OB'DC$ будет равна сумме проекций площадей $OAA'C$ и $OBC'C$, т.-е. сумме проекций двух прилежащих граней. Доказать это легко по рис. 28, принимая во внимание, что площадь $OBC'C$ равна площади $AB'DA'$, а площадь $OB'DC$ равна сумме площадей $OAA'C$ и $AB'DA'$.

Итак, для нашего параллелепипеда имеем



$$[(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C}]=[\mathbf{AC}]+[\mathbf{BC}],$$

а это означает, что при векторном произведении имеет место *дистрибутивность,* как в алгебре.

Конечно, при таком дистрибутивном перемножении необходимо сохранять порядок следования векторов друг за другом, т.-е. *не пермутировать*; иначе мы изменим знак соответствующего векторного произведения.

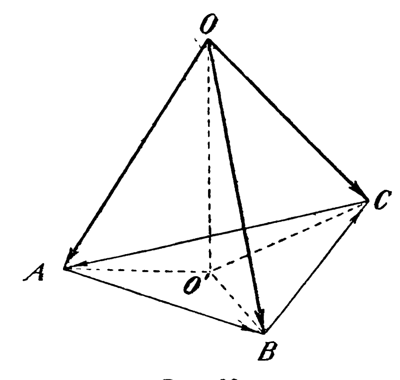


Рис. 29.

25. Пример. Применим только что доказанное правило к тетраедру (рис. 29).

Ребра этого тетраедра будут соответственно:

$$OA=\mathbf{A};\qquad OB=\mathbf{B};\qquad OC=\mathbf{C};$$
$$AB=\mathbf{A}-\mathbf{B};\quad BC=\mathbf{B}-\mathbf{C};\quad CA=\mathbf{C}-\mathbf{A}.$$

Удвоенные площади его боковых граней будут:

$$[\mathbf{AB}],\quad [\mathbf{BC}],\quad [\mathbf{CA}],$$

при чем все нормали направлены *наружу* тетраедра.

Удвоенную площадь основания можно выразить тремя эквивалентными формулами:

$$2\triangle=[(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{B}-\mathbf{C})]=[(\mathbf{B}-\mathbf{C})(\mathbf{C}-\mathbf{A})]=[(\mathbf{C}-\mathbf{A})(\mathbf{A}-\mathbf{B})].$$

Нормаль основания у нас направлена *внутрь* тетраэдра (см. направление контура).

Производя перемножение с раскрытием скобок и принимая во внимание, что

$$[\mathbf{AA}]=[\mathbf{BB}]=[\mathbf{CC}]=0,$$

получаем из любого выражения:

$$2\triangle=[\mathbf{AB}]+[\mathbf{BC}]+[\mathbf{CA}],$$

т.-е. что площадь основания тетраедра равна геометрической сумме трех его боковых граней, или, что то же самое, — площадь основания тетраедра равна алгебраической сумме проекций трех его граней на плоскость основания.

В этом же смысле мы можем сказать, что сумма всех граней любого замкнутого многогранника равна нулю, а векторы, их изображающие, образуют замкнутый многоугольник. Легко обнаружить, что это верно и для тела, ограниченного кривыми поверхностями, если разбить их на бесконечно малые плоские площадки.

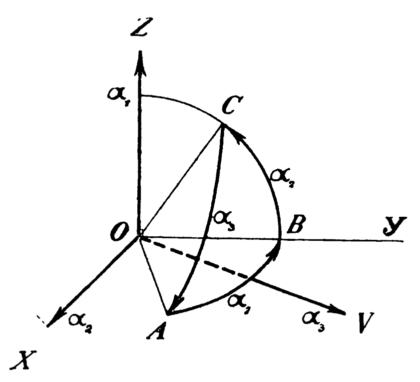


Рис. 30.

26. Сложение вращений. Возьмем в плоскости XY (рис. 30) радиус $OA=r$ и повернем его до совпадения с осью Y. Получим новое положение OB. Угол поворота α_1 имеет вполне определенную *величину* и *направление*, и мы могли бы условиться откладывать его по оси вращения Z, подобно тому, как мы условились откладывать векторные произведения и величины площадей. Тем не менее угол α_1 не есть вектор.

Действительно, повернем радиус OB в плоскости YZ, т.-е. вокруг оси X, на угол α_2 до положения OC и отложим угол α_2 по оси X, а затем приведем OC опять в совпадение с OA поворотом в плоскости OCA на угол α_3; этот угол придется отложить на некоторой оси V, перпендикулярной к плоскости OCA. Так как точка A описала замкнутый путь, т.-е результирующий угол пово-

рота радиуса r равен нулю, то, если бы углы α были действительно векторы, мы могли бы написать *векторное* равенство

$$\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_3} = 0.$$

Между тем эти три вектора не составляют замкнутого треугольника. Из рис. 30 прямо видно, что ось V даже не лежит в плоскости ZX, в которой лежат векторы $\overline{\alpha_1}$ и $\overline{\alpha_2}$, и, следовательно, $\overline{\alpha_3}$ не может быть диагональю параллелограмма, построенного на $\overline{\alpha_1}$ и $\overline{\alpha_2}$.

Далее, если применить к шаровому сектору $OABC$ теорему о замкнутых многогранниках (стр. 23, **25**) и принять во внимание, что площадь кругового сектора с углом α равна $\frac{1}{2} r^2\alpha$, и что эту площадь можно отложить в виде вектора, как мы хотели откладывать углы α, то можем написать векторное уравнение

$$\frac{1}{2} r^2 (\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_3}) + \text{вектор площади } (ABC) = 0.$$

Но из этого мы видим, что векторная сумма $(\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_3})$ не равна нулю. Только при *бесконечно малых* углах α (в пределе), когда площадь ABC делается бесконечно малой величиной *второго* порядка, мы имеем право написать

$$d\overline{\alpha_1} + d\overline{\alpha_2} + d\overline{\alpha_3} = 0.$$

Разделив это уравнение на элемент времени dt и обозначая через $\mathfrak{u}$ угловые скорости, получим

$$\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3 = 0.$$

Итак, угловые скорости суть векторы, а углы поворота — не векторы.

27. Пример. Пусть точка A (рис. 31) вращается вокруг оси OU, описывая полный круг в T секунд. Угловая скорость этого вращения будет равна

$$\mathfrak{u} = \frac{2\pi}{T},$$

а линейная скорость точки A

$$v = \frac{2\pi}{T} r \sin(ur) = ur \sin(ur).$$

Если мы условимся откладывать угловые скорости в виде векторов по оси вращения и притом так, чтобы путь, описываемый точкою AB, и ось OU были в право-винтовом соотношении, тогда все три вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ будут расположены тоже по право-винтовой системе, и мы можем формулу для скорости написать в векторном виде

$$\mathbf{v} = [\mathbf{ur}].$$

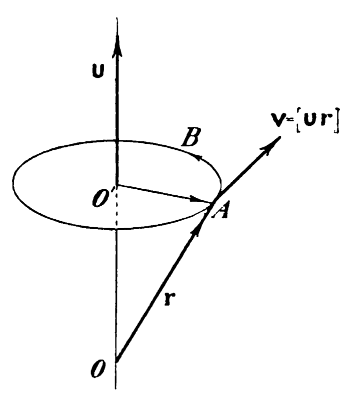


Рис. 31.

Поворот ручки буравчика от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{r}$ дает ему поступательное движение по направлению $\mathbf{v}$ (рис. 31).

В предыдущем параграфе мы уже доказали, что угловые скорости имеют свойство вектора; теперь докажем это еще раз несколько иначе. Положим, что точка A вращается одновременно вокруг двух осей, проходящих через точку O, и пусть угловые скорости будут $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Так как линейные скорости суть векторы и складываются геометрически, то результирующая скорость должна быть:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [\mathbf{u}_1\mathbf{r}] + [\mathbf{u}_2\mathbf{r}] = [\mathbf{ur}],$$

где $\mathbf{u}$ — результирующая угловая скорость.

Для того чтобы это равенство имело место — необходимо, чтобы

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u},$$

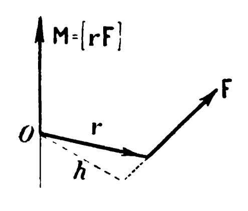


Рис. 32.

т.-е. угловые скорости должны тоже складываться геометрически.

Момент силы вокруг точки O (рис. 32), как известно, равен произведению силы $\mathbf{F}$ на плечо $h = r\sin(r\mathbf{F})$. Поэтому можно и моменты сил изображать векторами

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}].$$

Вектор момента $\mathbf{M}$ направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$.

Точно так же, если мы *количество движения* $m\mathbf{v}$, или *импульс*, обозначим через $\mathbf{p}$, то момент импульса будет

$$Q = rp\sin(rp)$$

и изобразится в векторном обозначении так:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

28. Проекции векторного произведения на оси координат. Пусть даны два вектора **A** и **B** своими проекциями на оси координат X, Y, Z, так что

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y + \mathbf{B}_z.$$

Составляя векторное произведение

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}\mathbf{B}] = [(\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z)\ (\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y + \mathbf{B}_z)] = \mathbf{C}_x + \mathbf{C}_y + \mathbf{C}_z$$

и принимая во внимание, что векторы одинакового направления дают в произведении нуль, и сравнивая величины проекций в правой и левой частях равенства, получаем

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$
$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$
$$C_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

В левых частях этих равенств мы имеем проекции векторного произведения $[\mathbf{AB}]$ на *оси* координат, тогда как в правых частях — проекции площади параллелограмма $AB\sin(AB)$ на плоскости координат.

Формулы эти так часто встречаются, что их полезно знать наизусть. Но их и не трудно запомнить, если заметить, что индексы в первых членах правой части непосредственно следуют за индексом левой части по правилам круговой перестановки (xyz, yzx, zxy). Индексы же во вторых членах правой части представляют собою простую перестановку индексов первого члена. При этом буквы A и B не переставляются.

Советуем читателю применить эти формулы к выражениям предыдущего параграфа

$$\mathbf{v} = [\mathbf{u}\mathbf{r}],\ \ \mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}],\ \ \mathbf{Q} = [\mathbf{r}\mathbf{p}],$$

которые играют большую роль в механике точки и твердого тела.

Если векторы **A** и **B** принять равными единице и обозначить косинусы их углов наклонения к осям X, Y, Z соответственно через α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, а для вектора $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$ обозначить эти косинусы через γ_1, γ_2, γ_3, тогда векторное уравнение

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1] = \sin\ (AB)\ C_1$$

даст нам следующие три скалярных уравнения:

$$\sin(AB)\ \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$$
$$\sin(AB)\ \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$$
$$\sin(AB)\ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Возводя в квадрат и складывая затем эти выражения, получаем известную формулу аналитической геометрии для sin угла между двумя прямыми $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$, выраженного через cos углов, составляемых этими прямыми с осями координат:

$$\sin^2(AB) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2.$$

Так как $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, то ту же формулу мы можем получить из выражения для $\cos(AB)$ (стр. 16, **19**).

Если $A = B = C = 1$ и *перпендикулярны* друг к другу, то, называя их X', Y', Z', получаем формулы, встречающиеся в аналитической геометрии при преобразовании декартовых координат:

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$$
$$\gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$$
$$\gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Если $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 1$ и лежат в плоскости XY, тогда получаем

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1 \text{ и } \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = 0;$$
$$\sin(AB) = \cos(AX)\cos(BY) - \cos(AY)\cos(BX).$$

Таким образом, помня формулы векторного произведения, мы без затруднения можем написать целый ряд других важных формул.

29. Произведение векторов вида A(BC). Произведение

$$(\mathbf{BC}) = BC\cos(BC)$$

есть скалар; поэтому произведение этого скалара на вектор **A** (стр. 9, **11**) есть вектор того же направления, что **A**, но в (**BC**) раз больший.

В произведении **A**(**BC**) нельзя переставлять множители в скобках со множителями вне скобок, без изменения смысла самого произведения. Действительно, векторы

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{A}_1\ BC\cos(BC)$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{CA}) = \mathbf{B}_1\ CA\cos(CA)$$
$$\mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{C}_1\ AB\cos(AB),$$

вообще говоря, различной величины и различного направления.

30. Произведение A[BC]. Мы уже знаем, что векторное произведение **[BC]**, которое мы обозначим через **D**, представляет собою площадь параллелограмма $OBB'C$ (рис. 33), построенного на **B** и **C**, т.-е. площадь *основания* параллелепипеда, построенного на **A**, **B** и **C**. Проекция же **A** на **D** есть *высота* этого параллелепипеда. Отсюда видим, что скалярное произведение **(AD)** или наше произведение трех векторов **A[BC]** представляет собою *объем* параллелепипеда, построенного на векторах **A**, **B** и **C**.

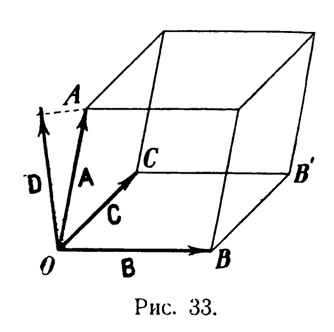


Рис. 33.

Так как величина объема должна получиться та же, возьмем ли мы за основание

[BC], **[CA]** или **[AB]**, то

$$\mathbf{A}[\mathbf{BC}] = \mathbf{B}[\mathbf{CA}] = \mathbf{C}[\mathbf{AB}].$$

Значит в этом произведении, в противоположность произведению **A(BC)**, мы можем переставлять множители без изменения результата произведения. Необходимо, однако, соблюдать круговой порядок множителей, чтобы не изменить знак произведения.

Из формы этих произведений непосредственно следует, что если два из трех перемножаемых векторов параллельны, то произведение равно нулю.

Выразим произведение **A[BC]** через проекции векторов на оси координат по (стр. 16,**19**, стр. 26,**28**).

$$\mathbf{A}[\mathbf{BC}] = A_x[\mathbf{BC}]_x + A_y[\mathbf{BC}]_y + A_z[\mathbf{BC}]_z =$$
$$= A_x[B_yC_z - B_zC_y] + A_y[B_zC_x - B_xC_z] + A_z[B_xC_y - B_yC_x],$$

а это выражение, в свою очередь, равно детерминанту

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

Итак, объем параллелепипеда, составленного из векторов **A**, **B** и **C**, равен детерминанту, составленному из проекций этих векторов на оси координат. Миноры же этого детерминанта представляют собою проекции граней этого параллелепипеда на плоскости коор-

динат. Если этот детерминант равен нулю, то это означает, что три вектора **A**, **B**, **C** лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях — *компланарны*.

31. Произведение $\left[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]\right]$. Вектор $\mathbf{D} = [\mathbf{BC}]$ (рис. 34) перпендикулярен к плоскости векторов **B** и **C**. А вектор $\mathbf{E} = [\mathbf{AD}]$, в свою очередь, перпендикулярен к **D** и, следовательно, лежит в плоскости векторов **B** и **C**. Мы можем поэтому разложить вектор **E** на две составляющие по направлениям **B** и **C**. — Определим величины этих составляющих. — Назовем проекцию вектора **A** на плоскость BC через **F** (рис. 34), т.-е. положим $F = A \sin(AD)$; тогда скалярная величина вектора **E** выразится так:

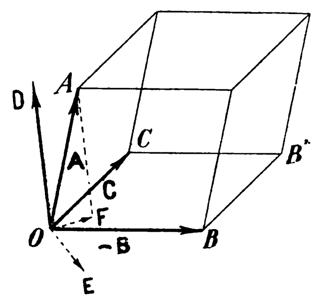


Рис. 34.

$$E = A \sin(AD) D = FBC \sin BC.$$

С другой стороны, так как **E** перпендикулярно к **F**, то (стр. 27,28):

$$\sin(BC) = \cos(BE)\cos(CF) - \cos(BF)\cos(CE),$$

и, следовательно,

$$E = BC\cos(BE).F\cos(CF) - BC\cos(CE).F\cos(BF) =$$
$$= BC\cos(BE).A\cos(AC) - BC\cos(CE).A\cos(AB)$$

или в векторном обозначении

$$\mathbf{E} = \left[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]\right] = \mathbf{B}(\mathbf{CA}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

Таким образом вектор **E** разложен у нас на два направления, по **B** и по **C**.

Можно получить тот же результат, оперируя с проекциями векторов на оси координат; так, например,

$$E_x = A_y D_z - A_z D_y = A_y[B_x C_y - B_y C_x] - A_z[B_z C_x - B_x C_z];$$

прибавляя и вычитая произведение $A_x B_x C_x$ и собирая в скобки множители при B_x и C_x, получаем

$$E_x = B_x(CA) - C_x(AB),$$

а это эквивалентно полученному нами выше векторному выражению для **E**.

Легко видеть, что

$$\left[\mathbf{A}\,[\mathbf{BC}]\right]+\left[\mathbf{B}\,[\mathbf{CA}]\right]+\left[\mathbf{C}\,[\mathbf{AB}]\right]=0.$$

32. Произведение [AB][CD]. Переставляя в этом произведении векторы **[AB]** и **D** (стр. 28,**30**), получим

$$[\mathbf{AB}]\,[\mathbf{CD}]=\mathbf{C}\left[\mathbf{D}\,[\mathbf{AB}]\right],$$

а по предыдущему параграфу

$$\left[\mathbf{D}\,[\mathbf{AB}]\right]=\mathbf{A}\,(\mathbf{BD})-\mathbf{B}\,(\mathbf{DA}).$$

Следовательно

$$[\mathbf{AB}]\,[\mathbf{CD}]=(\mathbf{CA})\,(\mathbf{BD})-(\mathbf{BC})\,(\mathbf{DA}).$$

33. Полярные и аксиальные векторы. Полезно отметить существенную разницу между векторами, которые мы здесь встречали.

Векторы *смещения, скорости, силы* обыкновенно приложены к точке или, как говорят, к *полюсу*, и направление их определяется непосредственно по их физическому смыслу. Подобные векторы носят название *полярных* векторов.

С другой стороны, *угловая скорость* вращения, *момент силы* и т. п. *условно* откладываются по *оси* вращения, и направление их не может быть определено непосредственно из понятия вращения, а необходимо еще условиться — считать ли их направление по *правой* или по *левой* винтовой системе. Подобные векторы носят название *аксиальных* векторов.

Вектор площадки и вообще все векторные произведения представляют собою аксиальные векторы.

Когда мы познакомимся с векторами высших порядков, так называемыми *тензорами*, то увидим, что векторное произведение относится, строго говоря, к разряду тензоров второго порядка.

34. Деление векторов. Мы рассмотрели в этой главе только *произведения* векторов, совершенно не упоминая о *делении* векторов друг на друга. Но дело в том, что в скалярной алгебре всякое изменение одного из множителей в произведении $a \cdot b = c$ изменяет величину c; в векторной же алгебре, как легко заметить, и скалярное и векторное произведение могут остаться

неизменными при некоторых изменениях одного из множителей. Так, если в произведении **AB** заменить вектор **B** любым другим вектором, проекция которого на **A** равна проекции **B** на **A**, то произведение не изменится. Поэтому в алгебре $a = \frac{c}{b}$ имеет вполне определенный смысл, между тем для векторов $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}}$ может иметь разные значения.

Правда, можно было бы условиться относительно того, что́ понимать под делением на вектор, и некоторые авторы действительно пробовали это делать. Однако подобные предложения не внесли пока ни упрощения в формулах, ни наглядности в выводах. Поэтому лучше совсем отказаться от употребления вектора в знаменателе во избежание недоразумений.

Таким образом у нас *вектор* **B** в знаменателе встречаться не будет; мы будем иметь дело только с делением на *скалярную* величину B вектора, и такое деление будет, конечно, равносильно умножению на скалар $\frac{1}{B}$.

3. ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ.

35. Дифференциалы в физике. Приложение анализа бесконечно малых, т.-е. дифференциального и интегрального исчисления к физическим явлениям требует некоторых оговорок.

Понятия о производной и о дифференциале в математике основано на представлении о *беспредельно* убывающих величинах, и величина производной представляет собою предел отношения двух величин $\frac{ds}{dx}$ при *беспредельном* уменьшении обеих. Для того чтобы этот предел был конечной величины, необходимо, чтобы s была *непрерывная* функция x.

Между тем все физические тела состоят из отдельных молекул и, следовательно, по существу своему *прерывны*.

Если мы говорим об элементе длины ds, например, какой-либо линейки, то, строго говоря, при *беспредельном* уменьшении этот элемент ds теряет свой физический смысл. Уменьшив ds до молекулярных размеров, 10^{-8} *cm*, мы не только не в состоянии будем определить *направление* этого элемента, но даже, если бы мы могли это сделать в один определенный момент времени, то в следующий

момент, вследствие постоянного движения молекул, это направление пришлось бы уже изменить.

Поэтому, желая применять к *физической* линейке или, вообще, к физической линии анализ бесконечно малых, мы должны физическую линию заменить некоторой идеальной *математической* линией, проведенной по некоторому *среднему* пути сквозь объем, занимаемый рассматриваемыми молекулами. К этой-то идеальной *математической* линии и относятся собственно все наши выводы.

То же самое мы можем сказать и об элементе площади dS и об элементе объема do.

Так, например, плотность тела ρ в какой-либо его точке мы определяем как *предел* отношения массы тела dm к его объему do:

$$\rho = \frac{dm}{do}.$$

При *беспредельном* уменьшении do это отношение обращается в *производную*; и мы, действительно, будем с ним обращаться как с *математической* производной.

Однако такое определение плотности может быть прилагаемо к *действительным* телам только до известных пределов. Если уменьшить объем do до молекулярных размеров, то масса тела, заключающаяся в этом объеме, делается прерывною, и притом не только в пространстве, но и во времени. Тем не менее мы можем условиться приписывать каждой *точке* тела определенную плотность, предполагая, однако, что для определения этой плотности около рассматриваемой точки был взят настолько *большой объем*, что прерывность материи и движение молекул уже не оказывало заметного влияния на величину заключающейся в этом объеме массы. С другой стороны, взятый нами объем не должен быть *слишком велик*: ведь он должен в рассматриваемом нами физическом явлении играть роль *элемента* объема, с которым мы хотим обращаться как с дифференциалом. Так, например, из этих элементов объема мы будем составлять объемы куба, шара и т. п. физического тела; поверхность этих тел должна быть достаточно гладкая для того, чтобы мы в приложении могли считать ее за грань куба или за поверхность шара. В различных приложениях эта степень гладкости, а следовательно, и величина do, может быть различною.

Это замечание относится в одинаковой мере к большинству физических явлений, и вышеуказанную разницу между математическим

определением и их приложениями к теоретической физике не следует упускать из виду.

36. Элемент линии. Если нам дана какая-нибудь *кривая* линия $O1A$ (рис. 35), то мы можем ее разбить на отдельные участки или *элементы* $d\mathbf{s}$, настолько малые, чтобы их можно было считать за прямые линии. Как велики эти участки в действительности, это будет зависеть от физических условий и от требуемой точности. Мы будем обращаться с этими элементами $d\mathbf{s}$, как с дифференциалами.

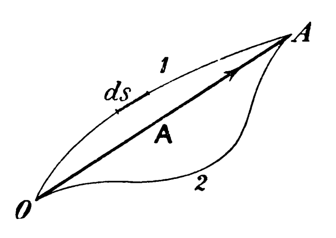


Рис. 35.

Величина $d\mathbf{s}$ есть вектор, коего проекции на прямоугольные, прямолинейные оси координат мы обозначим через dx, dy, dz; тогда

$$(d\mathbf{s})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

Под интегралом

$$\int_{O1A}^{A} d\mathbf{s} = \mathbf{A}$$

мы будем подразумевать *геометрическую* сумму всех элементарных векторов $d\mathbf{s}$ кривой линии $O1A$. Эти элементарные векторы образуют как бы многоугольник, коего замыкающая сторона и будет вектор $\mathbf{A}$.

Таким образом, интеграл от *вектора* $d\mathbf{s}$ не равен длине s как это было бы, если бы s было скаларом.

Если мы от той же точки O пойдем по какой-нибудь другой линии $O2A$ и опять придем в точку A, то, очевидно, получим в сумме тот же вектор $\mathbf{A}$:

$$\int_{O2A}^{A} d\mathbf{s} = \mathbf{A}.$$

Следовательно значение нашего интеграла не зависит от пути интегрирования, а зависит только от относительного положения начальной и конечной точки пути.

Если мы пойдем по обратному пути и, выйдя из точки A, придем в точку O, то для любого пути мы получили бы

$$\int_A^O d\mathbf{s} = -\mathbf{A}.$$

Если же мы пойдем сперва по пути $O1A$, а затем по пути $A2O$ и придем опять в исходную точку, то получим нуль:

$$\int_O^A d\mathbf{s} + \int_A^O d\mathbf{s} = 0.$$

Обобщая этот результат, мы можем сказать, что любой *замкнутый* контур дает

$$\oint d\mathbf{s} = 0.$$

Это означает совершенно то же самое, что геометрическая сумма сторон замкнутого многоугольника равна нулю (ср. стр. 8, **9**).

Знак интеграла с кружком будет у нас означать интегрирование по *замкнутой* границе, в данном случае — по *замкнутому контуру*.

37. Элемент поверхности. Если нам дана какая-нибудь кривая поверхность S, то мы можем разбить ее на отдельные участки любой формы, но настолько малые, чтобы их можно было считать за плоские. Как велики эти участки будут в действительности, это будет зависеть от физических условий и от требуемой точности, но мы будем обращаться с ними, как с *дифференциалами* $d\mathbf{S}$.

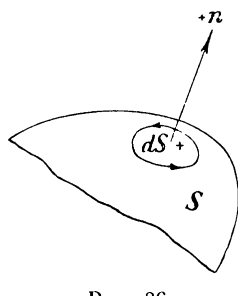


Рис. 36.

Каждый элемент поверхности должен у нас иметь контур и нормаль определенных направлений, по право-винтовой системе (рис. 36).

Величину $d\mathbf{S}$ мы можем изобразить также в виде элементарного вектора $d\mathbf{n}$ по положительной нормали к площади $d\mathbf{S}$. Ту сторону элементарной площадки $d\mathbf{S}$, в которую выходит *положительная* нормаль, будем называть *положительной* и обозначать знаком $+$ (плюс); с противоположной стороны у той же площадки будет — (минус).

Под интегралом по поверхности S

$$\int d\mathbf{S} = \mathbf{n}$$

мы будем подразумевать *геометрическую* сумму всех площадок $d\mathbf{S}$, т.-е. всех векторов $d\mathbf{n}$.

Всякую замкнутую поверхность мы можем рассматривать как замкнутый многогранник, составленный из элементов $d\mathbf{S}$. Для замкнутой поверхности все $d\mathbf{n}$ образуют замкнутый многоугольник и, следовательно (ср. стр. 23, **25**),

$$\oint d\mathbf{S} = 0.$$

Здесь кружок у интеграла опять означает интегрирование по замкнутой границе, в данном случае — по *замкнутой поверхности*.

Разрежем нашу поверхность по какому-либо контуру $abcd$ (рис. 37). Тогда обе части нашей поверхности должны дать одно и то же значение интегралу $\mathbf{n}$, но только с противоположными знаками, потому что в сумме они дают нуль. И, действительно, если мы дадим нашему контуру определенное направление стрелкой (см. рис. 37), тогда нормаль $\mathbf{n}_1$ окажется по отношению к этому контуру по право-винтовой системе, а $\mathbf{n}_2$ по лево-винтовой системе и

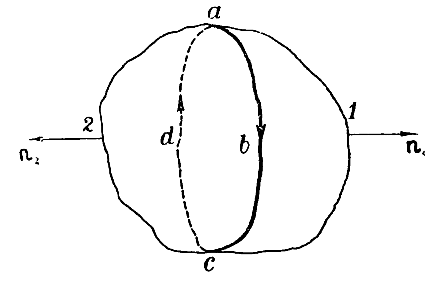


Рис. 37.

$$\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = 0.$$

Из этого мы заключаем, что любая поверхность, для которой данный контур $abcd$ служит границей, имеет одну и ту же величину интеграла

$$\int d\mathbf{S} = \mathbf{n}.$$

Для того, чтобы определить эту величину $\mathbf{n}$, мы можем поступить следующим образом.

Проектируем контур *abcd* на плоскости координат *YZ*, *ZX* и *XY* и, определив площади полученных проекций, отложим их величины по осям *X*, *Y* и *Z*. Тогда получим вектор

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_y + \mathbf{n}_z$$

или

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2.$$

Эти уравнения и будут решать задачу.

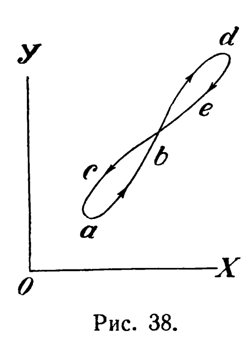


Рис. 38.

При таком способе нужно, конечно, обращать внимание на *направление* контура в проекциях, чтобы не ошибиться в знаке.

Так, например, если на плоскости *XY* контур образовал петлю (рис. 38), то площадь, ограниченную контуром *abc*, нужно отложить по $+Z$, а площадь, ограниченную контуром *bde*, отложить по $-Z$.

38. Элемент плоского угла. Если на окружности радиуса *r* у точки *P* выделить элемент линии *ds*, и если этот элемент виден из центра под некоторым углом $d\alpha$, то, как известно,

$$ds = r d\alpha.$$

Если направление элемента *ds* не совпадает с направлением окружности, то мы можем взять проекцию *ds* на окружность (с элементом *ds* и элементом длины окружности можно обращаться, как с прямыми линиями), и получим (см. рис. 39):

$$ds \cos(nr) = r d\alpha,$$

откуда

$$d\alpha = \frac{ds \cdot \cos(nr)}{r}.$$

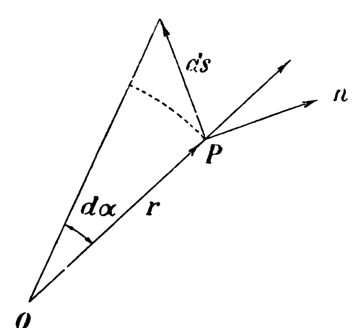


Рис. 39.

Здесь *n* означает направление положительной нормали к *ds*. Направления линий *ds*, *n*, *r* должны быть даны или относительно них необходимо как-нибудь условиться.

39. Элемент телесного угла. Совершенно таким же образом как с элементом плоского угла $d\alpha$, мы можем поступить и с эле-

ментом телесного угла $d\omega$. В этом случае, вместо окружности нужно будет взять поверхность шара. Но шаровые поверхности растут пропорционально *квадрату* радиуса, поэтому элемент поверхности dS, выделенный на шаре, и видимый из центра под *телесным* углом $d\omega$, будет равен

$$dS = r^2 d\omega.$$

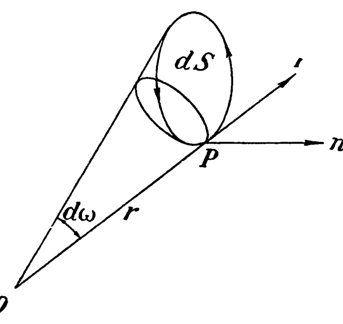


Рис. 40.

Если элемент поверхности dS не совпадает с поверхностью шара, то мы можем провести через точку P шаровую поверхность радиуса r и взять проекцию площадки dS на эту поверхность; тогда получим площадку на шаре (обе площадки по их малости принимаем за плоские):

$$dS\cos(nr) = r^2 d\omega,$$

откуда

$$d\omega = \frac{dS.\cos(nr)}{r^2}.$$

Здесь n означает направление нормали к площадке dS.

Заметим, что $d\omega$ может быть положительным и отрицательным, смотря по тому, какая сторона площадки dS видна из точки O и какое направление r мы приняли за положительное. Поэтому у площадки dS надо дать направление ее нормали или, что то же самое, направление ее контура (см. стр. 19, **22**). Обыкновенно телесный угол считают положительным, когда из его вершины видна положительная сторона площадки.

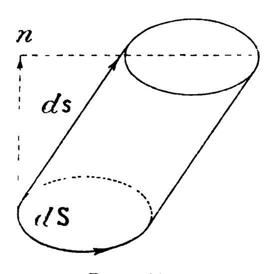


Рис. 41.

40. Элемент объема. Элемент объема, очевидно, равен скалярному произведению вектора элементарной площадки $d\mathbf{S}$ на вектор элемента длины $d\mathbf{s}$ (рис. 41)

$$do = (d\mathbf{S}\,.\,d\mathbf{s}).$$

Для различных систем координат элемент площади и элемент длины будут иметь различные выражения.

Так, например, в *декартовых* координатах (рис. 42)

$$do = dx\,dy\,dz.$$

В *косоугольных* координатах можем написать

$$do = d\mathbf{x}[d\mathbf{y}\cdot d\mathbf{z}].$$

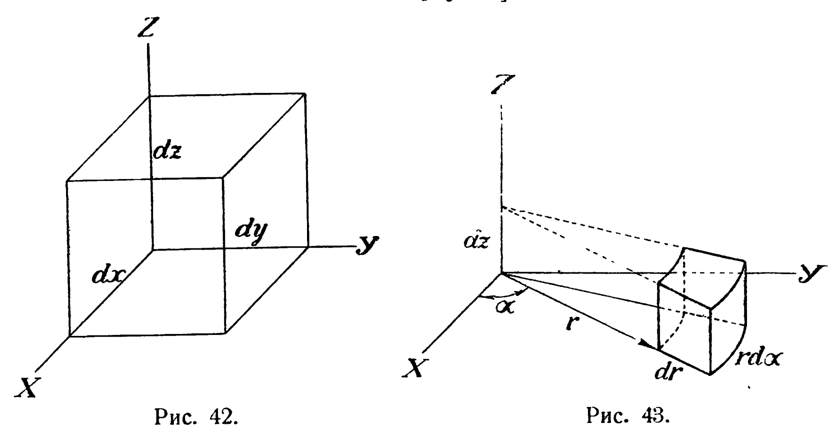


Рис. 42. Рис. 43.

В *цилиндрическх* координатах (рис. 43) в плоскости XY элемент площади будет

$$dS = r d\alpha \cdot dr$$

и, следовательно,

$$do = r\,d\alpha\,dr\,dz.$$

Когда физическое явление симметрично вокруг оси Z, т.-е. не зависит от α, то часто за элемент объема берут разность объемов двух цилиндров радиусов r и $r + dr$; тогда

$$do = 2\pi r\,dr\,dz.$$

В *сферических* координатах за элемент площадки на шаре радиусом r можно взять четыреугольник, образованный параллелями и меридианами.

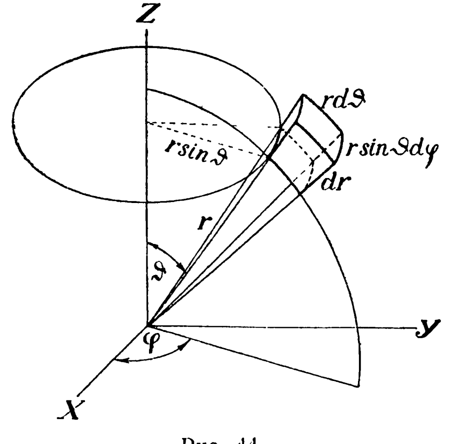


Рис. 44.

Элемент длины по параллели будет

$$r \sin \vartheta \,.\, d\varphi.$$

Элемент длины по меридиану будет

$$r\, d\vartheta.$$

Величина площадки

$$dS = r^2 \sin \vartheta \,.\, d\varphi \,.\, d\vartheta$$

и объем

$$do = r^2 \sin \vartheta \,.\, d\varphi \,.\, d\vartheta \,.\, dr.$$

Если ввести в это выражение величину телесного угла $d\omega$, (стр. 37, **39**) то получим

$$do = r^2 d\omega \cdot dr.$$

41. Производная вектора по скаляру. Представим себе некоторый радиус-вектор $\mathbf{r}$ (рис. 45), который в некоторое время t занимает положение OP, а во время $t+dt$ занимает положение $OP' = \mathbf{r}'$. Длина $PP' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ будет некоторый элементарный вектор $d\mathbf{r}$, направление которого, вообще говоря, может и не совпадать с направлением $\mathbf{r}$ (рис. 45). Под производной вектора $\mathbf{r}$ по скаляру t подразумевают предел отношения вектора $d\mathbf{r}$ к скаляру dt при беспредельном уменьшении и того и другого.

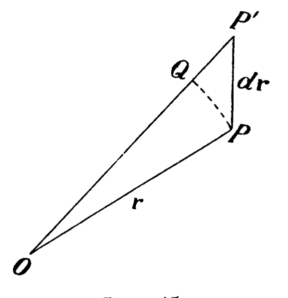


Рис. 45.

Как видим, определение векторной производной совершенно одинаково с определением скалярной производной; но разница заключается в том, что $d\mathbf{r}$, а следовательно, и $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ суть *векторы* и имеют не только *величину,* но и *направление.*

Если t есть время, то, очевидно, вектор

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r})$$

есть скорость движения точки от P к P', а $d\mathbf{r}$ есть пройденный этой точкой за время dt путь $d\mathbf{s}$.

Вектор $d\mathbf{s}$ мы можем представить как произведение единичного вектора $\mathbf{s}_1$, направленного по касательной к пути и скалара ds:

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = \mathbf{s}_1 \, ds$$

и тогда имеем

$$\mathbf{s}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

т.-е. единичный вектор касательной к пути (или к траектории точки) равен производной радиуса-вектора по пути. В этом случае *скалар* ds, т.-е. *длина* пути принята за независимое переменное, а не время.

42. Поворот вектора. Заметим, что если $dr = 0$, то это еще не значит, что сам вектор $d\mathbf{r} = 0$, а означает только, что радиус вектор не изменил своей скалярной величины, а, оставаясь себе равным, повернулся на некоторый угол $d\alpha_0$ и принял другое направление. Разберем этот случай несколько подробнее.

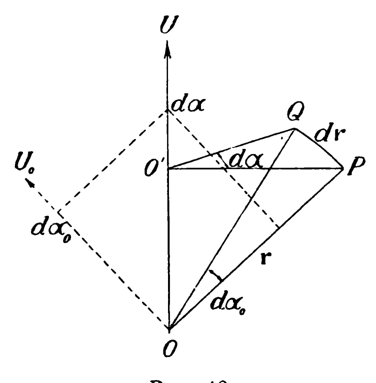


Рис. 46.

Угол $d\alpha_0$ мы можем изобразить вектором (рис. 46), отложенным из точки O нормально к плоскости OPQ векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т.-е. по оси U_0. Тогда вектор $d\mathbf{r}$ может быть представлен и по величине и по направлению векторным произведением

$$d\mathbf{r} = [d\overline{\alpha}_0 \cdot \mathbf{r}].$$

Впрочем, обыкновенно дается не угол поворота самого вектора $\mathbf{r}$, а угол $d\overline{\alpha}$ поворота точки P вокруг некоторой оси U (рис. 46), направление которой не перпендикулярно к $\mathbf{r}$. Но и для этого более общего случая мы можем получить такое же уравнение. Мы сделаем это двумя способами.

Во-первых, отложив по оси U угол $d\alpha$ (рис. 46), разложим его на два вектора: один по оси U_0 и другой—по оси $\mathbf{r}$. Но последняя составляющая поворачивает вектор $\mathbf{r}$ вокруг оси $\mathbf{r}$ и, следовательно, никакого движения точки P не производит. Первая же составляющая равна

$$d\alpha_0 = d\alpha \cos(UU_0) = d\alpha \sin(Ur).$$

И теперь мы можем написать

$$dr = d\bar{\alpha}_0 \, . \, r = d\alpha \, . \, r \sin(Ur)$$

или векторное уравнение

$$d\mathbf{r} = [d\bar{\alpha} \cdot \mathbf{r}].$$

При этом ось поворота U может быть и не перпендикулярна к $\mathbf{r}$.

То же самое уравнение мы можем получить еще другим способом.

Проектируем треугольник OPQ на плоскость, перпендикулярную к оси U (рис. 46). При этом у точки O' получится вектор

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \sin(Ur),$$

который поворачивается вокруг перпендикулярной к нему оси U на угол $d\alpha$ и, следовательно, опять $dr = d\alpha r_0$. В векторных обозначениях имеем

$$d\mathbf{r} = [d\bar{\alpha} \, . \, \mathbf{r}],$$

т.-е. то же самое, что и выше.

Разделив это уравнение на элемент времени dt, переходя к пределу, и обозначая угловую скорость вращения через

$$\mathbf{u} = \frac{d\bar{\alpha}}{dt},$$

получаем выражение для линейной скорости вращения точки P через угловую скорость вращения вокруг оси U:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{u} \, . \, \mathbf{r}].$$

В более общем случае, когда вектор $\mathbf{r}$ меняет и свою величину, и свое направление, мы можем разложить вектор $d\mathbf{r}$, а также и скорость движения точки $\mathbf{v}$ на две составляющие: одну по радиусу $\mathbf{v}_r$, а другую по окружности $\mathbf{v}_s$; тогда получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + [\mathbf{u} \, . \, \mathbf{r}].$$

43. Ускорение точки. От вектора скорости мы можем перейти к вектору ускорения, взяв опять производную по времени. И здесь не нужно забывать, что, вообще говоря, не только величина скорости, но и ее направление может меняться со временем. Поэтому, написав для скорости

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_1 v$$

и взяв производную от этого произведения, имеем

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{s}_1 \frac{dv}{dt} + \frac{d\mathbf{s}_1}{dt} v.$$

Но во втором члене справа $\mathbf{s}_1$ не может менять своей величины, потому что это есть вектор, равный единице; он может менять только свое направление. Поэтому совершенно так же, как и выше (стр. 41, **42**), при вращении радиуса-вектора с угловою скоростью $\mathbf{u}$, мы можем написать

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = \frac{d\mathbf{s}_1}{dt} = [\mathbf{u}\,\mathbf{s}_1].$$

Полученный нами вектор $\dot{\mathbf{s}}_1$ перпендикулярен к $\mathbf{s}_1$, т.-е. перпендикулярен к траектории движения и, как легко видеть, направлен от точки P к центру кривизны. Если мы это последнее направление обозначим единичным вектором $\mathbf{R}_1$, то будем иметь

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{R}_1 u,$$

и, следовательно, второй член правой части выразится так:

$$\dot{\mathbf{s}}_1 v = \mathbf{R}_1 v u = \mathbf{R}_1 r u^2 = \mathbf{R}_1 \frac{v^2}{r},$$

где r есть *величина* радиуса кривизны траектории.

Из этого мы видим, что второй член нашей формулы для ускорения точки представляет собою не что иное как *центростремительное ускорение точки.*

Полное же ускорение движения точки составилось из *двух* частей: из ускорения по *касательной* и ускорения по *радиусу кривизны* траектории точки:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{s}_1 \dot{v} + \mathbf{R}_1 \frac{v^2}{r}.$$

44. Геометрическое значение производных. Мы предполагаем, что читатель знаком с элементами дифференциального и интегрального исчислений, где подробно излагается теория пределов и объясняются значения производных и дифференциалов. Тем не менее, имея в виду последующие применения этих понятий,

мы вкратце напомним читателю *геометрическое* значение этих величин.

Если в плоскости XY дана кривая

$$y = f(x),$$

то тангенс угла наклонения касательной к этой кривой в какой-либо точке P равен производной

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

от y по x в этой точке. Поэтому, если кривая в какой-либо точке не имеет касательной, или касательная делается неопределенной, или если в точке P можно провести несколько касательных, то все это будет относиться и к производной.

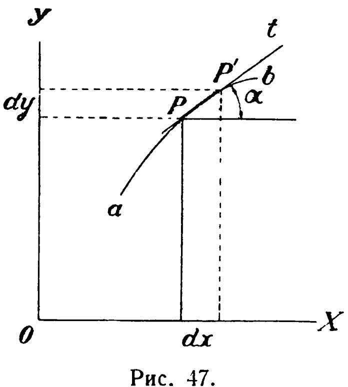


Рис. 47.

Отношение dy к dx или предел этого отношения, т.-е $f'(x)$, мы будем иногда, ради наглядности, описывать такими словами: $\frac{dy}{dx}$ представляет собою увеличение y, отнесенное к *единице* длины dx, которая получается при переходе от точки P к *соседней*, т.-е. бесконечно близкой точке P' той же кривой.

Иногда мы будем называть $\frac{dy}{dx}$ *крутизной* или *быстротой подъема* кривой в точке P. Отрицательный подъем это, очевидно, *спуск*.

Понятие о дифференциале dy непосредственно следует из понятия о производной:

$$dy = f'(x)dx.$$

Действительно, если подъем на *единицу* длины (крутизна) равен $f'(x)$, то весь подъем dy на всю длину dx будет в dx раз больше, т.-е. $f'(x)dx$.

Как видим, величина dy зависит и от $f'(x)$ и от dx.

Если величина какой-либо функции зависит от двух переменных x и y, то можно себе представить поверхность (рис. 48)

$$z = f(xy).$$

Тогда тангенс угла наклонения касательной t_1 в точке P в плоскости, параллельной плоскости XZ ($y = Const$), будет *частная* производная от z по x,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ при } y = Const.$$

Точно так же, для касательной t_2 в плоскости, параллельной плоскости ZY, получим *частную* производную от z по y,

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ при } x = Const.$$

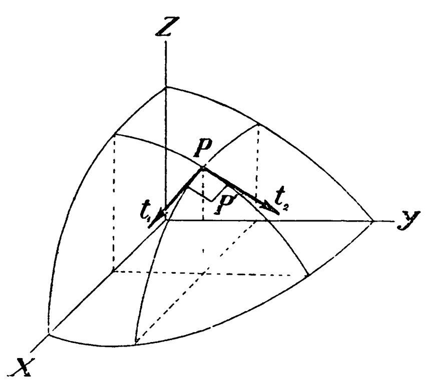


Рис. 48.

Переход точки P к соседней точке P' на поверхности, т.-е. подъем на высоту dz, может быть совершен в два этапа. Сперва параллельно плоскости XZ мы поднимемся на высоту

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

затем параллельно плоскости YZ на высоту

$$\frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Весь подъем, т.-е. *полный* дифференциал, будет

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Мы могли бы получить тот же результат, поднимаясь по другому пути: сперва параллельно плоскости YZ, а затем параллельно плоскости XZ. Однако, как увидим ниже, бывают и исключения из этого правила.

Совершенно аналогично с этим — для функции *трех* и более переменных получим

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots$$

Так как каждая *частная* производная по одной из переменных берется при *неизменных* всех других переменных, то знак $\frac{\partial}{\partial x}$ сам по себе еще не имеет определенного смысла, если мы не укажем, — какие другие переменные при этом дифференцировании остаются постоянными. Так, например, частные производные по z для одной и той же поверхности

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad f(r, x, z) = 0,$$

но выраженной с одной стороны в декартовых координатах, а с другой стороны — в цилиндрических координатах, могут быть различными.

Это значение *частной* производной надо себе ясно представлять (например геометрически) и не упускать его из виду, иначе возможны грубые ошибки, в особенности при применениях в теоретической физике.

45. Производная скаляра f по оси $\mathfrak{s}$. До сих пор мы брали производные от скаляра по скаляру же, и сама производная оставалась скаляром. Но в теории поля у нас часто будут встречаться производные от скаляров, которые имеют векторный характер.

Положим, что какой-либо скаляр f имеет в двух соседних точках пространства P и P_1, отстоящих друг от друга на длину $d\mathfrak{s}$ — два разных значения f и $f + df$. Предел отношения df к ds, при беспредельном приближении этих двух точек друг к другу, называется производной скаляра f по *направлению оси* $\mathfrak{s}$. Эту производную откладывают по направлению $d\mathfrak{s}$ в виде вектора. Подобные векторы можно отложить от точки P *во все стороны.*

Если за направления $\mathfrak{s}$ взять три оси декартовых координат, а скаляр f предполагать функцией x, y, z, то получим

$$G_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad G_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \qquad G_z = \frac{\partial f}{\partial z},$$

т.-е. *частные* производные от $f(x, y, z)$ *по осям координат.*

Полный дифференциал функции f будет равен

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Мы можем истолковать это уравнение, как скалярное произведение двух векторов: одного вектора $\mathfrak{G}$, коего проекции на оси ко-

ординат написаны выше, и другого вектора $d\mathbf{s}$, коего проекции равны dx, dy, dz.

Тогда можно выражение для дифференциала df написать в виде скалярного произведения

$$df = (\mathbf{G} \, . \, d\mathbf{s}).$$

Представим себе поверхность (рис. 49)

$$f(x, y, z) = f(\mathbf{r}) = Const.$$

и положим, что мы переходим в соседнюю точку P' *той же поверхности*, т.-е. по такому направлению $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$, для которого $df = 0$, тогда полученное нами уравнение

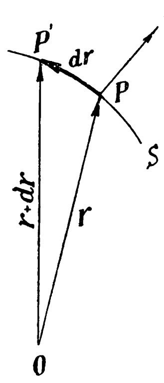


Рис. 49.

$$(\mathbf{G} \, . \, d\mathbf{r}) = 0,$$

будет означать, что вектор $\mathbf{G}$ перпендикулярен к $d\mathbf{r}$.

Но векторы $d\mathbf{r}$, лежащие на поверхности $f(\mathbf{r})$, можно провести у точки P во все стороны, и ко всем ним вектор $\mathbf{G}$ будет перпендикулярен. Отсюда заключаем, что найденный нами вектор $\mathbf{G}$ направлен по *нормали* к поверхности $f(\mathbf{r})$.

Поэтому, если мы теперь направим $d\mathbf{s}$, не вдоль по поверхности, а по ее нормали $d\mathbf{n}$, то $(\cos\,(Gn) = 1)$ получим

$$df = \mathbf{G} \, . \, dn \quad \text{или} \quad \frac{df}{dn} = \mathbf{G}.$$

Мы направляли вектор $d\mathbf{s}$ вдоль поверхности и по нормали к поверхности; теперь направим $d\mathbf{s}$ вообще по какому-либо косому направлению; тогда из уравнения

$$df = (\mathbf{G} \, d\mathbf{s}) = G \, . \, ds \, . \, \cos\,(Gs) = \mathbf{G}_s \, ds$$

получаем значение *производной по любой оси* $\mathbf{s}$

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{G}_s.$$

Мы видим, что производная скалара f по оси s равна проекции вектора $\mathbf{G}$, нормального к поверхности $f = Const.$, на эту ось.

Вектор $\mathbf{G}$ встретится нам в теории поля, где он носит название *градиента*.

46. Производная вектора A по оси s. Совершенно аналогично с тем, как мы сейчас поступили со скаляром, мы можем поступить и с вектором.

Пусть (рис. 50) вектор **A** имеет в двух близких точках пространства O и O' значения **A** и **A'**, разнящиеся и по величине и по направлению. Если свести начала обоих векторов в одну точку O и построить их разность d**A**, то предел отношения вектора d**A** к скаляру ds и будет производная вектора **A** по оси **s**. Как видим, эта производная по оси **s** есть вектор, направленный по d**A**, между тем в предыдущем параграфе мы получили производную, направленную по оси **s**.

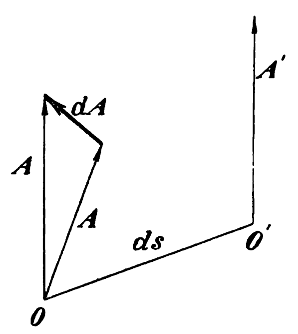


Рис. 50.

Если вектор **A** нам дан своими проекциями на декартовы оси координат, то с каждой проекцией мы можем обращаться, как со скаляром; тогда получим, например,

$$dA_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz.$$

Подставляя сюда

$$dx = ds \cos(Xs), \quad dy = ds \cos(Ys), \quad dz = ds \cos(Zs),$$

получаем

$$\frac{dA_x}{d\mathbf{s}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \cos(Xs) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \cos(Ys) + \frac{\partial A_x}{\partial z} \cos(Zs).$$

Аналогичные выражения получаем для A_y и A_z. Таким образом, мы получим проекции на оси координат производной вектора **A** по направлению оси **s**.

47. Интегрирование по пути. Положим, что точка движется по пути **s** под действием какой-либо силы **F**.

Работа силы на участке пути $Oa = ds$ будет равна

$$dW = F\,ds \cos(Fs).$$

Работа на другом участке пути ab будет совершаться, вообще говоря, под действием силы, — другой величины и иначе наклоненной к пути. Тем не менее мы можем сложить все эти эле-

ментарные работы и выразить полную работу, совершаемую на конечном пути от O до d непрерывною суммою или интегралом

$$W=\int_O^d (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = \int_O^A (\mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s}),$$

где $\mathbf{F}_s$ есть проекция силы на путь.

Подобные интегралы, состоящие из скаларного произведения какого-либо вектора на путь, довольно часто встречаются в физике. Они носят название *интегралов по пути или по линии* **s**.

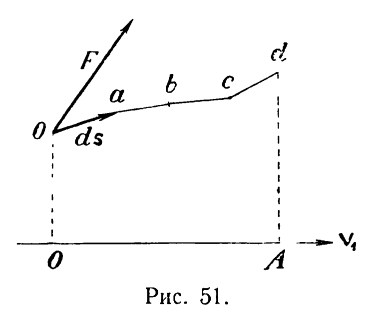


Рис. 51.

Иногда результат интегрирования не зависит от пути, как например, когда $\mathbf{F}_s = Const.$ (ср. стр. 33, **36**, где $F=1$), но иногда, при различных путях интегрирования, получаются различные результаты.

48. Пример. Пусть $\mathbf{v}$—постоянная скорость какого-либо твердого тела или потока жидкости. Напишем интеграл по пути Od (рис. 51):

$$\int_O^d (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}). = \int_O^d v(\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{s}).$$

Скаларное произведение $(\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{s})$ мы можем толковать как проекцию $d\mathbf{s}$ на постоянное направление $\mathbf{v}_1$. Если длину OA (рис. 51) обозначить через A, то

$$W=\int_O^A (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = v\int_O^A (\mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{s}) = vA,$$

т.-е. не зависит от пути.

Если же взять этот интеграл по замкнутому контуру, то получим для любого замкнутого контура

$$\oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = 0.$$

Нечто другое мы получим, если вместо поступательного движения тела возьмем движение вращательное.

Скорость точки A (рис. 52) на расстоянии r от оси при угловой скорости вращения u будет равна

$$v = ur.$$

Интегрируя по окружности круга r, по пути $ABCA$, получим

$$\oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = ur \cdot 2\pi r = 2u\pi r^2.$$

Как видим, результат интегрирования не равен нулю, а зависит от площади описываемого нами круга.

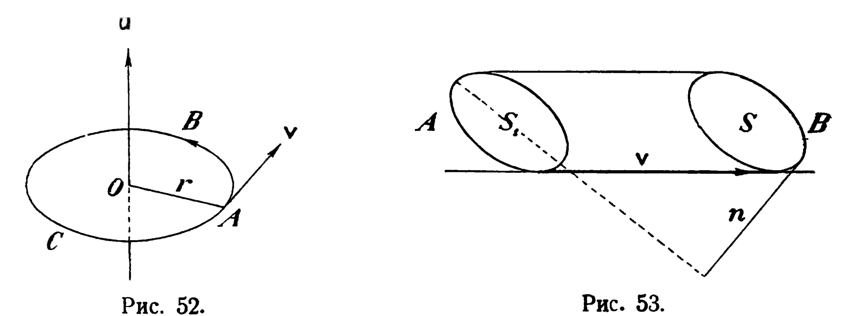


Рис. 52. Рис. 53.

49. Поток вектора. Представим себе жидкость, текущую с постоянной скоростью v по трубе AB (рис. 53). Проведем мысленно в трубе некоторое плоское сечение S. Для того, чтобы определить, какой объем жидкости протекает сквозь сечение S, отложим от S против течения жидкости длину v и построим в S_1 совершенно такое же сечение, как S. Очевидно, что весь объем жидкости между S_1 и S должен пройти через S в одну секунду.

Но объем цилиндра (SS_1) равен

$$N = Sn = Sv \cos(vn),$$

где n — нормаль к S, т.-е. высота цилиндра.

Величина N называется *потоком жидкости* сквозь сечение трубы S.

Если мы величину площади $\mathbf{S}$ будем изображать вектором, отложенным по ее нормали, то поток жидкости выразится так:

$$N = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{v}_n \mathbf{S}.$$

Подобные выражения очень часто встречаются в физике, при чем вместо скорости в это произведение могут входить и другие

векторы; так, например: угловые скорости, напряжение поля и т. п. Во всех случаях скаларное произведение любого вектора $\mathbf{A}$ на площадку $\mathbf{S}$ называется *потоком* вектора $\mathbf{A}$.

В вышеприведенном примере поток вектора $\mathbf{v}$ был равен *объему* ежесекундно протекающей по трубе жидкости. Но вместо вектора скорости мы могли бы взять вектор, представляющий собою произведение из плотности жидкости ρ и скорости $\mathbf{v}$, т.-е. вектор $\rho\mathbf{v}$ (плотность количества движения жидкости). Тогда поток вектора $\rho\mathbf{v}$ будет

$$N = (\rho\,\mathbf{v}\,.\,\mathbf{S}).$$

Это выражение дает нам не *объем, а массу* ежесекундно протекающей сквозь сечение $\mathbf{S}$ жидкости.

50. Интегрирование по поверхности. Пусть нам дана (рис. 54) какая-либо поверхность S, у которой векторы $\mathbf{v}$ могут иметь в различных местах различную величину и различное направление. Для определения потока этих векторов сквозь поверхность S необходимо разделить всю поверхность на элементарные площадки, настолько малые, чтобы их можно было считать плоскими, и чтобы самый вектор внутри каждой площадки можно было считать постоянным по величине и направлению.

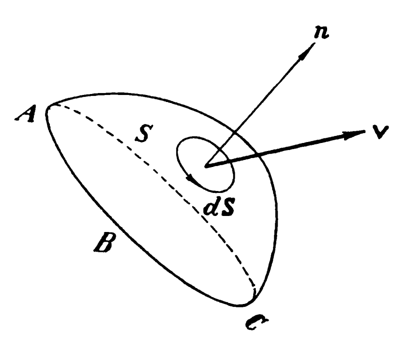


Рис. 54.

В таком случае для каждой элементарной площадки поток будет равен

$$dN = (\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{S}),$$

а поток сквозь всю поверхность, ограниченную контуром ABC, получим, интегрируя

$$N = \int_{ABC} (\mathbf{v}\,.\,d\mathbf{S}) = \int_{ABC} \mathbf{v}_n\,.\,d\mathbf{S}.$$

Это называется интегралом вектора $\mathbf{v}$, взятым по поверхности.

В частности, когда вектор $\mathbf{v}$ имеет везде одинаковое направление, мы можем написать

$$N = \mathbf{v} \int_{ABC} (\mathbf{v}_1 d\mathbf{S}),$$

но $(\mathbf{v}_1 d\mathbf{S})$ есть проекция вектора $d\mathbf{S}$ на направление $\mathbf{v}_1$ и в то же время это есть проекция площадки $d\mathbf{S}$ на плоскость, перпендикулярную к направлению $\mathbf{v}_1$.

Поэтому мы можем сказать, что

$$\int_{ABC} (\mathbf{v}_1 \, d\mathbf{S}) =$$

= площади проекции контура ABC на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{v}_1$.

Для замкнутой поверхности, как и для замкнутого многогранника, имеем

$$\oint (\mathbf{v}_1 \, d\mathbf{S}) = 0.$$

51. Пример. Дано твердое тело, вращающееся вокруг оси OU с угловою скоростью u (рис. 55). Определим интеграл $(\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s})$ по замкнутому пути $ABCA$. Подставляя вместо скорости $\mathbf{v}$ ее выражение через вращательную скорость u (стр. 41, **42**), имеем

$$(\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s}) = ([\mathbf{ur}] \, d\mathbf{s}) = \mathbf{u} \, [\mathbf{r} \, . \, d\mathbf{s}].$$

Но $[\mathbf{r} \, d\mathbf{s}]$ равно *удвоенной* площади треугольника, построенного на $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{s}$. Эту площадь треугольника мы можем принять за элемент $d\mathbf{s}$ боковой поверхности $d\mathbf{S}$ конуса, описанного из точки O через контур $ABCA$ (рис. 55). Поэтому

$$\oint_{ABCA} (\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s}) = \oint_{ABCA} 2\mathbf{u} \, \frac{[\mathbf{r} \, . \, d\mathbf{s}]}{2} = \int_{OABC} (2\mathbf{u} \, . \, d\mathbf{S}).$$

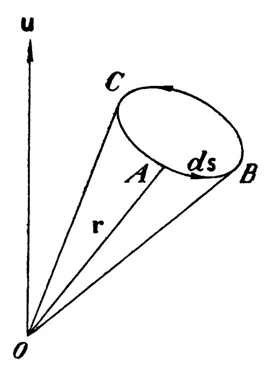


Рис. 55.

Последний интеграл представляет собою *поток* вектора $2\mathbf{u}$ сквозь боковую поверхность конуса $OABC$. Но так как вектор $2\mathbf{u}$ для всех точек вращающегося твердого тела один и тот же, то поток его сквозь боковую поверхность конуса ($OABC$) будет тот же, что и сквозь площадь основания (ABC). Поэтому мы можем написать

$$\oint_{ABCA} (\mathbf{v} \, d\mathbf{s}) = \int_{ABC} (2\mathbf{u} \, . \, d\mathbf{S}),$$

а это означает, что интеграл скорости точек вращающегося твердого тела по любому замкнутому контуру равен потоку удвоенной угловой скорости этого тела, сквозь любую поверхность, ограниченную этим контуром.

Положим в частном случае, что мы интегрируем по окружности круга радиуса r с центром в O, при чем плоскость этого круга перпендикулярна к $\mathbf{u}$. Площадь круга равна πr^2, а поток вектора $\mathbf{u}$ сквозь эту площадь будет $\mathbf{u}\pi r^2$, и, следовательно,

$$\int (\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{s}) = 2\mathbf{u}\pi r^2.$$

Этот результат мы уже получили раньше (стр. 49, **48**).

Вышеприведенные примеры суть только частные случаи более общих теорем Гаусса и Стокса, о которых мы будем говорить ниже.

52. Оператор Гамильтона. Применение его к скаляру. Целый ряд формул, которые у нас будут встречаться в теории поля, бывает иногда удобнее писать и легче запоминать, если применять *символически*, т.-е. *формально*, вектор ∇, коего составляющие по осям координат соответственно равны

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y} \qquad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Разберем несколько наиболее часто встречающихся выражений.

Произведение вектора ∇ на какой-либо скалар $f(x, y, z)$ должно быть вектором. Проекции этого вектора на оси координат будут

$$\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \nabla_y f = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \nabla_z f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Это не что иное, как частные производные скалара $f(x, y, z)$ по осям координат. Мы уже встречали этот вектор (стр. 46, **45**) и видели, что он нормален к поверхности $f(x, y, z) = \text{Const}$. Его называют *градиентом*,

$$\nabla f = \operatorname{grad} f.$$

Квадрат фиктивного вектора ∇, как и всякого действительного вектора, есть скалар

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

который в применении к скаляру f означает сумму вторых производных от f по осям координат

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Символ $\nabla^2 f$ не нужно смешивать с символом $(\nabla f)^2$, который представляет собою квадрат градиента

$$(\nabla f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = (\text{grad } f)^2.$$

53. Применение ∇ к вектору. Произведение символического вектора ∇ на какой-либо действительный вектор $\mathbf{A}$ может быть двояким: скалярным и векторным.

Скалярное произведение означает

$$(\nabla\, \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{A}.$$

Этот скалар называется *расхождением* вектора $\mathbf{A}$ (*divergence*). *Векторное* произведение $[\nabla\, \mathbf{A}]$ будет вектором, коего проекции на декартовы оси координат будут (ср. стр. 26, **28**),

$$[\nabla\, \mathbf{A}]_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$[\nabla\, \mathbf{A}]_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$[\nabla\, \mathbf{A}]_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Этот вектор называется *вихрем* вектора $\mathbf{A}$ и обозначается знаком curl:

$$[\nabla\, \mathbf{A}] = \text{curl } \mathbf{A}.$$

Подробнее об этом векторе мы будем говорить ниже в теории поля.

Если ∇ принимать за вектор, то согласно правилам векторных произведений (стр. 28, **30**) должно быть

$$\nabla\, [\nabla\, \mathbf{A}] = \text{div . curl } \mathbf{A} = 0$$
$$[\nabla\, (\nabla f)\,] = \text{curl . grad } f = 0.$$

Что это действительно так, в этом легко убедиться непосредственным вычислением в декартовых координатах.

Так, например:

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0.$$

54. Исключения из векторных правил для вектора Гамильтона. С вектором Гамильтона ∇ не всегда можно обращаться, как с обыкновенными векторами; не нужно забывать, что он представляет собою знак *производной* по оси.

Так, например, применяя ∇ к произведению двух скаларов fp нужно будет применить его к *каждому множителю* отдельно:

$$\nabla(fp)=f(\nabla p)+p(\nabla f).$$

Это можно написать и так:

$$\operatorname{grad}(fp)=f\,.\operatorname{grad}p+p\,.\operatorname{grad}f.$$

Точно так же, применяя оператор ∇ к произведению скалара на вектор, имеем

$$\nabla\,.\,f\mathbf{A}=f(\nabla\mathbf{A})+(\nabla f\,.\,\mathbf{A}).$$

Это означает:

$$\operatorname{div}(f\,.\,\mathbf{A})=f\,.\operatorname{div}\mathbf{A}+\operatorname{grad}f\,.\,\mathbf{A}.$$

Наконец, если написать векторное произведение

$$[\nabla\,.\,f\mathbf{A}]=f[\nabla\mathbf{A}]+[\nabla f\,.\,\mathbf{A}],$$

то это означает:

$$\operatorname{curl}(f\,.\,\mathbf{A})=f\,.\operatorname{curl}\mathbf{A}+[\operatorname{grad}f\,.\,\mathbf{A}].$$

Ввиду такого отличия вектора Гамильтона от обыкновенных векторов, необходимо обращаться с ним осторожно и не слишком формально, иначе легко можно впасть в ошибки. Впрочем, мы не будем здесь развивать подробно правила применения символа ∇, а ограничимся лишь наиболее употребительными случаями.

55. Оператор $(\mathbf{A}\nabla)$. Формально этот оператор есть *скалар.* Он может быть применен и к скалару и к вектору. Применив его к скалару f, получим

$$(\mathbf{A}\nabla)f=A_x\frac{\partial f}{\partial x}+A_y\frac{\partial f}{\partial y}+A_z\frac{\partial f}{\partial z}=(\mathbf{A}\nabla f),$$

это есть скаларное произведение вектора **A** на grad $f = \mathbf{G}$

$$(\mathbf{A} \bigtriangledown) f = A \, . \, G \cos (AG).$$

Если обозначить направление или *ось* вектора **A** через a и принять во внимание (стр. 46, **45**), что

$$\mathbf{G} \cos (AG) = \mathbf{G}_a = \frac{df}{da},$$

то можем написать, что

$$(\mathbf{A} \bigtriangledown) f = A \frac{df}{da}.$$

Словами это выразится так: скаларная величина вектора **A** множится на быстроту подъема функции f по направлению вектора **A**.

Применяя скаларный оператор $(\mathbf{A} \bigtriangledown)$ к какому-либо вектору **B**, мы получаем для проекций на оси координат

$$(\mathbf{A} \bigtriangledown) B_x = A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$(\mathbf{A} \bigtriangledown) B_y = A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$(\mathbf{A} \bigtriangledown) B_z = A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Но правую часть, например, первого уравнения можно переписать в таком виде

$$A \left(\cos (AX) \frac{\partial B_x}{\partial x} + \cos (AY) \frac{\partial B_x}{\partial y} + \cos (AZ) \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) = A \frac{dB_x}{da},$$

откуда видим (ср. стр. 47, **46**), что произведение наше равно

$$(\mathbf{A} \bigtriangledown) \mathbf{B} = A \frac{d\mathbf{B}}{da}.$$

Его можно словами выразить так: это есть вектор, который имеет направление $d\mathbf{B}$, и величина которого равна произведению скаларной величины A на производную вектора **B** по оси вектора **A**.

Если вектор **A** равен единице, т.-е. представляет собою просто некоторое направление $\mathbf{s}_1$, тогда операция

$$(\mathbf{s}_1 \, . \bigtriangledown) \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{ds}$$

эквивалентна производной вектора **B** по этой оси $\mathbf{s}_1$.

56. Расхождение вектора [AB]. В декартовых координатах расхождение вектора [**AB**] будет выражаться так:

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \frac{\partial}{\partial x}[A_yB_z - A_zB_y] + \frac{\partial}{\partial y}[A_zB_x - A_xB_z] + \frac{\partial}{\partial z}[A_xB_y - A_yB_x];$$

выполняя дифференцирование и располагая иначе члены, получаем

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \mathbf{B}\,.\,\operatorname{curl}\mathbf{A} - \mathbf{A}\,.\,\operatorname{curl}\mathbf{B}.$$

57. Вихрь вектора [AB]. Для того, чтобы вычислить вихрь, т.-е. curl [**AB**], напишем составляющие по оси X от следующих двух векторных выражений:

$$(\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{A}(\nabla\mathbf{B}) \quad \text{и} \quad (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\mathbf{A}),$$

которые получаются друг из друга перестановкою букв **A** и **B**:

$$(\mathbf{A}\nabla)B_x - A_x(\nabla\mathbf{B}) = A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} - A_x\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z} - A_x\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

$$(\mathbf{B}\nabla)A_x - B_x(\nabla\mathbf{A}) = B_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - B_x\frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z\frac{\partial A_x}{\partial z} - B_x\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Вычитая первое из второго, получаем справа

$$\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_y - A_yB_x) - \frac{\partial}{\partial z}(A_zB_x - A_xB_z),$$

т.-е. составляющую по оси X от curl [**AB**].

Отсюда видим, что

$$\operatorname{curl}[\mathbf{AB}] = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\mathbf{A}).$$

58. Значение Grad (AB). Точно так же, как и в предыдущем параграфе, вычисляем проекцию на ось X двух выражений

$$(\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} + [\mathbf{A}\,.\,\operatorname{curl}\mathbf{B}] \quad \text{и} \quad (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{B}\,.\,\operatorname{curl}\mathbf{A}]$$

и складываем их.

В результате получим

$$\operatorname{grad}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{A}\,.\,\operatorname{curl}\mathbf{B}] + [\mathbf{B}\,.\,\operatorname{curl}\mathbf{A}].$$

59. Значение Curl . curl A. Это выражение довольно часто встречается в различных отделах физики, и его полезно знать наизусть.

Опять проектируем на ось X:

$$(\text{curl} \,.\, \text{curl}\ \mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial y}(\text{curl}\ \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\text{curl}\ \mathbf{A})_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right).$$

Прибавляя и вычитая справа $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$ и переставляя соответственным образом члены, получаем

$$(\text{curl} \,.\, \text{curl}\ \mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x =$$

$$= \nabla_x(\nabla\, \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x.$$

Аналогичные выражения получим для осей Y и Z, а потому можем все три уравнения соединить в одно векторное уравнение

$$\text{curl} \,.\, \text{curl}\ \mathbf{A} = \nabla \,.\, \text{div}\ \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Примечание. Хотя все доказательства последних шести параграфов мы вели для простоты и краткости в декартовых координатах, тем не менее полученные нами векторные формулы, как и сам оператор Гамильтона ∇, имеют геометрическое значение ***независимо*** от выбора той или иной системы координат. Это видно по отсутствию в окончательных формулах всякого следа координатной системы.

О геометрическом значении вектора Гамильтона мы скажем подробнее в следующей главе II, в теории поля.

ГЛАВА II.

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

1. СКАЛАРНОЕ ПОЛЕ.

60. Физическое поле. Пространство, в котором происходят какие-либо физические явления, называется *физическим полем.*

Так, например, температура воздуха в различных частях земной поверхности и в различных слоях атмосферы представляет собою *поле температур*; вблизи магнитов мы наблюдаем *магнитное поле*; каждое наэлектризованное тело образует вокруг себя *электростатическое поле* и т. д.

Поля бывают *скалярные* и *векторные.*

Часто в одном и том же месте бывает несколько полей одновременно. Так, например, в земной атмосфере метеорология наблюдает *скалярные поля* — поле температур и поле давлений, — и *векторные поля* — поле скоростей воздуха (т.-е. направление и силу ветра), электрическое и магнитное поле и поле земного тяготения.

Нас могут интересовать не только распределения этих полей в один какой-нибудь момент времени, но также и законы зависимости этих полей друг от друга и их изменения со временем.

Оказывается, что большинство физических полей имеют так много общего друг с другом как по своей конструкции, так и по законам ими управляющим, что, изучив в подробностях одно из этих полей, мы можем легко предсказать явления, происходящие в другом поле. Чтобы убедиться в этом, стоит только вспомнить, что такие разнообразные явления, как свет, электрические и магнитные силы, а также и силы всемирного тяготения — все они действуют обратно пропорционально *квадрату* расстояния от источника. Очень часто и в технике применяются методы, основанные на аналогиях между явлениями в полях, которые по существу своему весьма различны. Так, наблюдая движение жидкости вблизи различных поста-

вленных на пути препятствий, можно получить картину линий сил магнитного поля. Движение воды в песчаном грунте аналогично диффузии раствора и аналогично движению тепла в неравномерно нагретом теле. Наконец, задачи теории упругости иногда сводятся на задачи электростатики и т. д. и т. д.

Выяснению и изучению *общих законов* различных физических полей и посвящается эта глава.

61. Скалярное поле. Пусть нам дано поле какого-либо скалара φ. Это значит, что даны значения φ для всех точек какого-либо пространства. Говорят: φ есть функция положения точки в этом пространстве, или — φ есть функция координат. Например в случае декартовых координат поле может быть дано в виде уравнения

$$\varphi = f(x, y, z).$$

Подобные функции φ мы будем большею частью называть *потенциалом*, хотя в применениях этот *скалар* может иметь значение температуры, давления, плотности жидкости и т. п.

Для более наглядного изображения поля и для более легкой ориентировки в нем при изучении его свойств, обыкновенно соединяют — на чертеже или мысленно — все точки пространства, имеющие одинаковые значения φ, поверхностями; их называют *поверхностями одинакового потенциала* или *эквипотенциальными поверхностями*.

Для различных значений φ одного и того же поля эквипотенциальные поверхности будут, вообще говоря, различной и самой разнообразной формы.

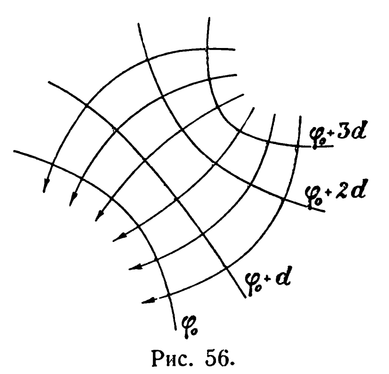


Рис. 56.

Проведем в поле ряд поверхностей с значениями потенциалов φ_0, $\varphi_0 + d$, $\varphi_0 + 2d$,... и т. д. Тогда все поле будет у нас *расслоено* эквипотенциальными поверхностями, при чем разность потенциалов между двумя смежными поверхностями будет везде одинакова, а именно равна d. Такое изображение поля очень удобно и наглядно, оно часто употребляется и в науке и в технике. Стоит только перенумеровать на чертеже эти поверхности, и тогда, по стоящему у поверхности номеру, мы уже будем знать потенциал всех точек данной поверхности (рис. 56). Потенциалы

тех точек поля, которые оказались в промежутке между проведенными на чертеже эквипотенциальными поверхностями, придется определять по интерполяции между двумя соседними поверхностями. Но чем меньше взято d для изображения поля, тем ближе друг к другу пройдут эквипотенциальные поверхности, и тем точнее будет наш чертеж и наша интерполяция. С математической точки зрения, мы можем предположить, что эквипотенциальные поверхности проведены *беспредельно* близко друг к другу, заполняя собою все пространство, занятое полем, и проходя через любую его точку. Такой чертеж поля был бы абсолютно точен.

Если функция φ *однозначна*, т.-е. в каждой точке поля имеет только одно значение, то две различных эквипотенциальных поверхности не могут иметь общих точек, т.-е. не могут ни пересекаться друг с другом, ни касаться друг другу.

Если функция φ *непрерывна*, т.-е. не изменяется скачками при непрерывном переходе от одной точки поля к другой, тогда в двух смежных эквипотенциальных поверхностях, находящихся друг от друга на бесконечно малом расстоянии dn, и разность потенциалов должна быть бесконечно мала $d\varphi$. В таком случае, при беспредельном уменьшении расстояния dn, предел отношения $\frac{d\varphi}{dn}$ будет конечный и будет представлять собою производную $d\varphi$ по dn.

У нас в большинстве случаев функция φ будет во всем поле *конечна*, *однозначна* и *непрерывна*. Исключения из этого будут рассмотрены нами особо.

Бывают случаи, когда эквипотенциальная поверхность обращается в линию, но мы можем считать эту линию за бесконечно тонкую трубчатую поверхность.

Если в поле окажется одинокая точка, у которой нет соседней точки с тем же самым потенциалом, то мы будет считать эту точку шаровою поверхностью беспредельно малого радиуса.

62. Градиент скалярного поля. Проведем в поле (рис. 57) через точку O эквипотенциальную поверхность φ и около нее проведем смежную с ней эквипотенциальную поверхность $\varphi + d\varphi$. При беспредельном приближении второй поверхности к первой, т.-е. при беспредельном уменьшении $d\varphi$, нормали обеих поверхностей около точки O будут тоже сближаться и составлять все меньший и меньший угол. В пределе у обеих поверхностей у точки O полу-

чится общая нормаль n, на которой они будут отсекать беспредельно уменьшающийся отрезок этой нормали dn. Определим отношение $\frac{d\varphi}{dn}$ и отложим эту величину у точки O *по нормали* n и притом ту сторону, куда φ *увеличивается*. Тогда получим вектор

$$\mathbf{G} = \frac{d\varphi}{dn}.$$

С этим вектором мы уже встречались раньше (стр. 45, **45**; стр. 52, **52**). Он называется *градиентом* скалярного поля φ и обозначается так:

$$\mathbf{G} = \nabla \varphi = \text{grad } \varphi.$$

Рис. 57.

В то время, как потенциал φ образует *скалярное* поле, его градиент $\mathbf{G}$ будет образовывать поле *векторное*.

Для того, чтобы градиент $\mathbf{G}$ имел во всех точках поля *определенное, конечное* значение, необходимо, чтобы скалярное поле φ удовлетворяло некоторым условиям, а именно:

Во-первых, функция φ должна сама быть *однозначна* в каждой точке поля; значит эквипотенциальные поверхности с разными потенциалами не должны пересекаться друг с другом.

Во-вторых, функция φ должна быть *непрерывной*, т.-е. бесконечно малому dn не должна соответствовать конечная разность потенциалов, иначе $\mathbf{G}$ сделалось бы бесконечно большим.

В-третьих, эквипотенциальные поверхности не должны иметь острых ребер или остроконечностей и вообще не должны иметь *особых точек*, в которых можно было бы провести несколько нормалей или в которых направление нормали сделалось бы неопределенным.

Исключение представляет тот случай, когда значение градиента нуль; но в этом случае наличие неопределенности в направлении нормали несущественно.

Если в каких-либо точках функция φ не удовлетворяет этим условиям, то мы должны будем исключать такие точки и поля и исследовать их отдельно, особым образом.

63. Свойства градиента. Рассмотрим опять две смежных, т.-е. бесконечно близких друг к другу эквипотенциальных поверхности φ и $\varphi + d\varphi$ (рис. 58). В непосредственной близости у точки O эти две поверхности можно считать за две параллельные пло-

скости, и если мы через ds обозначим расстояние между этими двумя плоскостями не по нормали, а по какому-либо наклонному направлению, образующему с нормалью угол (ns), то

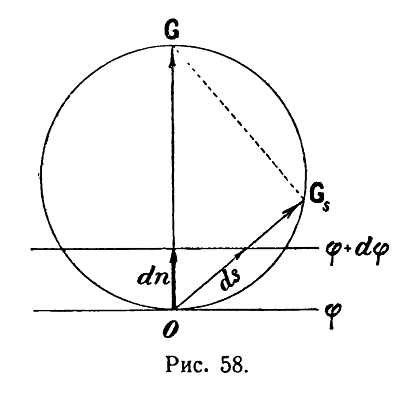


Рис. 58.

$$ds = \frac{dn}{\cos(ns)},$$

а предел отношения $d\varphi$ и ds будет производная по оси $\mathbf{s}$:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dn}\cos(ns) = \mathbf{G}\cos(ns) = \mathbf{G}_s.$$

Это соотношение между градиентом и производной по оси мы уже получили раньше (стр. 46, **45**), только из других соображений.

Если построить из точки O векторы $\mathbf{G}_s$ по всем направлениям $\mathbf{s}$, то они образуют своими концами шаровую поверхность (см. рис. 59), касательную к поверхности φ в точке O, а сам вектор $\mathbf{G}$, т.-е. градиент поля, будет наибольший из всех этих векторов.

Мы можем, следовательно, сказать, что градиент поля есть вектор, направление которого совпадает с тем направлением, куда *круче* всего *поднимается* потенциал; а величина градиента определяет *крутизну* этого подъема.

Впрочем, в физике большею частью имеют дело с такими векторными полями, которых векторы направлены *не в подъем, а в спуск.* Так, например, скорость движущейся жидкости $\mathbf{v}$ направлена туда, где давление меньше; теплота движется туда, где температура меньше, и т. п. Для подобных векторов нужно писать

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{d\varphi}{dn} = -\nabla\varphi.$$

При этом наше векторное поле $\mathbf{v}$ будет иметь в каждой точке направление в ту сторону, куда *круче всего спускается* потенциал, а величина этих векторов будет равна *падению* потенциала на единицу длины нормали к эквипотенциальной поверхности в этой точке.

64. Линия градиента. В каждой точке скаларного поля φ мы можем построить элементы нормалей dn к эквипотенциальным поверхностям; все эти элементы будут образовывать систему линий,

к которым векторы **G** в каждой точке поля будут касательны. Подобные линии в электричестве и магнетизме называются линиями сил, в гидродинамике их называют линиями потока жидкости и т. п. Мы будем их называть, вообще, ***векторными линиями.***

Большею частью направление этих линий принимается по — **G**, т.-е. в сторону уменьшения потенциалов (рис. 59).

Таким образом, поле скалара φ можно представлять себе—или даже изображать на рисунке —*расслоенным* целым рядом эквипотенциальных поверхностей, которые, в свою очередь, *пронизаны* целой системой векторных линий. Конечно, все векторные линии градиента **G** во всех точках встречи с эквипотенциальными поверхностями должны быть к ним перпендикулярны.

Мы уже говорили выше (стр. 59, **61**), что на чертежах эквипотенциальные поверхности обыкновенно проводят так, чтобы соседние потенциалы отличались друг от друга на одну и ту же конечную величину d, при чем величину d выбирают сообразно с желаемой точностью чертежа.

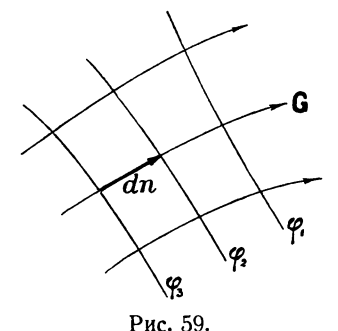


Рис. 59.

Точно также и векторные линии, которые с математической точки зрения заполняют *сплошь* все поле, обыкновенно чертят, сообразуясь с желаемой точностью, лишь в конечном числе. Но так как каждая линия дает только направление, а не величину вектора, а между тем, желательно изобразить на чертеже и величину векторов поля, то уславливаются размещать линии векторов *гуще*, т.-е. ближе друг к другу, там, где **G** больше, и *реже*, т.-е. дальше друг от друга, где **G** меньше. Под *густотою* векторных линий подразумевают *число* их N, приходящееся на cm^2 эквипотенциальной поверхности.

Удобнее всего было бы иметь такой чертеж, чтобы

$$N = G$$

или чтобы одно было пропорционально другому.

По чертежу, в котором проведены эквипотенциальные поверхности и векторные линии, по указанным выше правилам очень легко ориентироваться даже в поле сложной и неправильной формы, и подобные чертежи часто употребляются на практике.

При составлении подобных чертежей полезно не упускать из виду, что густота линий не независима от расположения эквипотенциальных поверхностей. Большая густота векторных линий должна быть там, где эквипотенциальные поверхности ближе подходят друг к другу, т.-е. где dn (при том же $d\varphi$) меньше. Наоборот, там, где соседние эквипотенциальные поверхности отходят дальше друг от друга, там поле градиента будет слабее и густота линий меньше.

65. Пример. Для иллюстрации только что сказанного возьмем простой пример поля не в пространстве, а на плоскости. Представим себе план какой-либо холмистой местности (рис. 60) с нанесенными на нем *высотами* h отдельных точек земной поверхности. При этом все высоты должны быть отсчитаны от какой-либо нулевой горизонтальной плоскости. На таком плане величины высот представляют собою *скалярное* поле, потому что высота на самом плане не имеет направления. Поле высот будет поле *потенциалов* — название очень подходящее, потому что высоты на земной поверхности действительно играют роль потенциалов земного тяготения (см. механику). Соединим все точки одинаковых высот линиями; — это будут для нашего случая *эквипотенциальные линии*. Их называют *горизонталями*, потому что они представляют собою линии пересечения горизонтальных плоскостей с поверхностью изображаемой местности. Если провести такие горизонтали на одинаковых расстояниях dh друг от друга, например через каждый метр высоты ($dh=1$ метр), то мы получим для скалярного поля h его графическое изображение, о котором мы говорили выше. Подобные планы с горизонталями часто употребляются инженерами и туристами. Они чрезвычайно удобны, потому что при одном взгляде на такой план мы сразу без всяких вычислений видим, где вершина горы, где долина и где круче или положе подъемы. Если горизонтали перенумерованы, то разность их номеров прямо дает нам разность высот (например в метрах) между двумя интересующими нас точками местности (рис. 60).

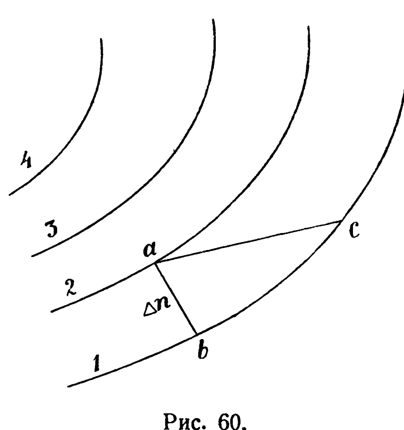


Рис. 60.

Если провести в плане нормали к этим горизонталям, то получим векторные линии градиента скалярного поля высот $\mathbf{G} = \frac{dh}{dn}$. Градиент в этом случае будет не что иное как *крутизна* поверхности земли.

Действительно, если сделаем вертикальный разрез местности по линии ac (рис. 61), то получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{ds} = \mathbf{G}_s.$$

Наиболее крутой уклон у точки a мы получим, если пойдем в плане по ***нормали*** к горизонтали, т.-е. по ab, потому что разность высот ab и ac одинакова, но ab наименьшее из всех расстояний ac.

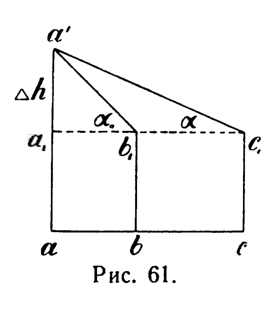


Рис. 61.

По плану с горизонталями, как мы уже сказали выше, очень удобно решать целый ряд вопросов.

Например, если нам нужно пройти из b в a, то кратчайший путь будет ba, но он будет и наиболее *крутой* для *подъема*. Если для проектируемой дороги дан предельный, т.-е. наибольший допустимый, уклон, то по плану легко выбрать такое направление дороги, которое удовлетворяло бы этому условию и не особенно удлиняло бы дорогу. По тому же плану мы можем определить естественный сток воды: вода будет стекать по линиям наибольшего *склона*, т.-е. на плане по нормалям к горизонталям, и притом по направлениям, противоположным градиенту высоты.

66. Свойства поля φ и $\mathbf{G}$. Из всего вышеизложенного мы можем вывести *два* основных свойства скалярного поля φ и его градиента $\mathbf{G}$.

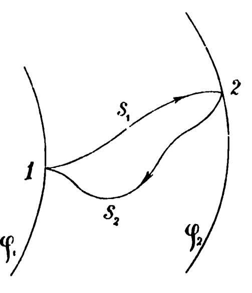


Рис. 62.

Во-первых, если

$$\mathbf{G}_s = \frac{d\varphi}{ds},$$

$$d\varphi = \mathbf{G}_s\, ds = (\mathbf{G} \,.\, ds),$$

то интеграл, взятый по пути $(1 s_1 2)$ (рис. 62), от какой-либо точки (1) с потенциалом φ_1 до какой-либо другой точки (2) с потенциалом φ_2, будет равен

$$\int_1^2 \mathbf{G}_s\, ds = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

То же самое мы получим, если возьмем такой же интеграл по другому пути $(1s_2 2)$.

Наоборот, если мы пойдем по пути $2s_2 1$, то получим

$$\int_2^1 \mathfrak{G}_s\, ds = \int_2^1 d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Отсюда заключаем, что если мы будем интегрировать по *замкнутому* пути $(1s_1\, 2s_2\, 1)$ и придем опять к той же точке (1), с тем же потенциалом φ_1 (мы предполагаем, что потенциал однозначен), то в результате получим нуль:

$$\oint \mathfrak{G}_s\, ds = 0.$$

Здесь интеграл с кружком внутри означает интегрирование по *замкнутому* пути.

Итак, первое основное свойство нашего поля состоит в следующем: интеграл градиента скаларного поля φ, взятый между двумя точками по любому пути, дает в результате разность потенциалов этих двух точек, независимо от пути интеграции. Интеграл же градиента по *замкнутому* пути всегда равен нулю.

Второе свойство нашего поля вытекает из выражения для проекций градиента на оси координат, а именно, если

$$G_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad G_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad G_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial y} G_z = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} G_y,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} G_z - \frac{\partial}{\partial z} G_y = 0.$$

Подобные же соотношения мы получим и для других составляющих градиента

$$\frac{\partial}{\partial z} G_x - \frac{\partial}{\partial x} G_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G_y - \frac{\partial}{\partial y} G_x = 0.$$

Эти три уравнения вместе обыкновенно обозначают символически (стр. 53, **53**) так

$$\operatorname{curl} \mathbf{G} = 0.$$

По-русски слово curl можно передать словом *вихрь*.

Таким образом вихрь градиента скалярного поля равен нулю.

Почему это выражение называется вихрем, это выясним в следующем параграфе.

2. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ.

67. Потенциал векторного поля. В предыдущей главе мы показали, каким образом из данного нам *скалярного* поля φ мы можем получить векторное поле

$$\mathbf{G} = \operatorname{grad} \varphi.$$

При этом скалярное поле φ мы изображали системой эквипотенциальных поверхностей, а векторное поле — системой нормальных к этим поверхностям векторных линий.

Предположим теперь, что нам дано *векторное* поле. Например дан поток жидкости. Частицы этой жидкости могут двигаться со скоростями $\mathbf{v}$, которые в различных местах будут, вообще говоря, иметь различную величину и различное направление. Мы уже сказали выше, что оперировать с векторным полем гораздо сложнее, чем с полем скалярным; поэтому является желательным данное нам векторное поле свести на скалярное.

Это можно сделать различными способами.

Во-первых, можно внести в поле вектора $\mathbf{v}$ оси координат X, Y, Z и определить для каждой точки проекции скорости на оси координат v_x, v_y и v_z. Эти три величины, с которыми можно обращаться, как со скалярами, суть функции x, y, z и, следовательно, представляют собою *три скалярных поля*. С проекциями v_x, v_y, v_z обращаться гораздо проще, чем с самим полем вектора $\mathbf{v}$, потому что они складываются алгебраически, между тем как сами векторы $\mathbf{v}$ складываются геометрически. Способ координат, как известно, обыкновенно и применяется в аналитической геометрии и в аналитической механике.

Но очень часто бывает выгодно, а иногда и физически необходимо сделать переход от векторного поля к скалярному другим

путем, а именно: подыскать к данному векторному полю $\mathbf{v}$ такое скалярное поле φ, для которого $\mathbf{v}$ служило бы градиентом.

Большею частью стараются подыскать φ так, чтобы

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Мы уже знаем, что это возможно только при условии, если

$$\oint (\mathbf{v}_s \,.\, ds) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{curl} \mathbf{v} = 0.$$

Для того, чтобы наглядно представить себе, что означают эти условия, составим себе следующую картину. Проведем в какой-либо точке поля элемент линии $d\mathbf{s}$ по направлению вектора $\mathbf{v}$ в этой точке; в соседней точке, т.-е. в конце этого элемента $d\mathbf{s}$, проведем новый элемент $d\mathbf{s}$ по направлению вектора $\mathbf{v}$ в этой второй точке и т. д. и т. д. Все эти элементы вместе образуют ломаную линию в поле, которая при беспредельном уменьшении $d\mathbf{s}$ превратится в плавную кривую; эти кривые будут изображать векторные линии нашего поля. Таким образом векторные линии мы можем проводить не только вдоль градиентов скалярного поля φ (стр. 63, **64**), но вообще в любом векторном поле.

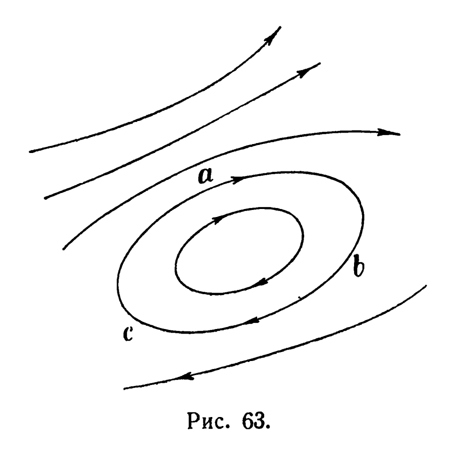


Рис. 63.

Если в изготовленном таким образом чертеже у нас окажутся в поле *замкнутые* линии, как, например, линия *abc* (рис. 63), тогда, идя вдоль по этой линии, мы имели бы в каждой ее точке и $\mathbf{v}_s$ и $d\mathbf{s}$ положительными, а следовательно, и произведение $(\mathbf{v}_s \,.\, d\mathbf{s})$ получилось бы положительным. В таком случае интеграл, взятый по замкнутой линии *abc*, уже не может быть равным нулю. Подобные замкнутые линии потока жидкости образуются обыкновенно около ***вихрей***. Поэтому поставленные выше условия эквивалентны требованию, чтобы в данном нам векторном поле не было ***замкнутых*** векторных линий, или иначе, чтобы данное нам поле не имело вихрей. Слово curl и означает вихрь (см. стр. 67, **66**).

Итак, если данное векторное поле не имеет вихрей, то существует такая функция φ, для которой

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Нахождение этой функции для любой точки P (рис. 64) данного поля делается при помощи интегрирования по какому-либо пути OP на основании формулы

$$\varphi - \varphi_o = -\int_o^P (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}).$$

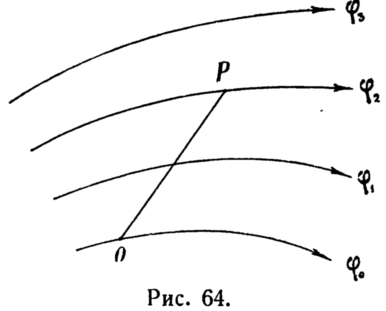


Рис. 64.

Как при всяком интегрировании остается неизвестной произвольная постоянная, так и здесь значение φ_o в исходной точке O интегрирования остается произвольным. Интегрирование по пути OP может дать нам только *разность* потенциалов конечной и начальной точек пути и не может, конечно, дать нам абсолютное значение искомого скаларного поля φ. Но если мы зададимся для какой-либо начальной точки значением φ_o, то значение $\varphi - \varphi_o$, а следовательно, и φ для любой точки поля будет вполне определено вышеуказанным интегрированием.

Скалар φ называется *потенциалом* векторного поля $\mathbf{v}$; а про поле вектора $\mathbf{v}$, в котором нет вихрей, говорят, что оно *имеет потенциал*

68. Сложение векторных полей. Пусть даны два векторных поля $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и требуется определить результирующее поле вектора

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

который в каждой точке поля равен геометрической сумме векторов первого и второго поля.

Если слагаемые поля не имеют вихрей, то мы можем написать

$$\mathbf{v}_1 = -\operatorname{grad} \varphi_1 , \quad \mathbf{v}_2 = -\operatorname{grad} \varphi_2,$$

а для составляющих этих векторов по оси X получим

$$v_{1x} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad v_{2x} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \qquad v_x = v_{1x} + v_{2x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Подобные же выражения мы получили бы для проекций и на другие оси координат, так что, вообще, можем написать

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = -\operatorname{grad}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Значит, для определения результирующего поля мы можем поступить двояко: или в каждой точке поля сложить векторы *геометрически* или сложить *алгебраически* их потенциалы (что бывает иногда гораздо проще), а затем по данному результирующему потенциалу, взяв его градиент, определить поле результирующего вектора.

69. Поток и расхождение вектора в поле. Проведем в поле вектора $\mathbf{v}$ (при этом полезно представить себе поле скоростей текущей жидкости) какую-нибудь *замкнутую* поверхность S и определим поток вектора $\mathbf{v}$ сквозь эту поверхность. Так как в различных частях этой поверхности вектор $\mathbf{v}$ может иметь различную величину и различное направление, то необходимо разделить всю поверхность на элементарные площадки dS (рис. 65) такой малой величины, чтобы в пределах каждой из этих площадок вектор $\mathbf{v}$ имел одну и ту же величину и одно и то же направление. Все нормали этих площадок возьмем *наружу* замкнутой поверхности.

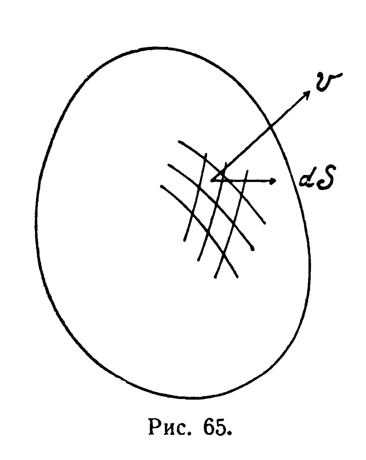


Рис. 65.

Элементарный поток сквозь каждую площадку dS будет (стр. 50, **50**)

$$dN = \mathbf{v}_n \cdot d\mathbf{S}.$$

Так как у нас положительная нормаль направлена наружу поверхности, то *положительное* dN будет обозначать *вытекание* жидкости из объема o, заключенного внутри поверхности S, а *отрицательное* dN будет означать *втекание* внутрь этого объема.

Полный поток сквозь всю поверхность S будет

$$N = \oint (\mathbf{v}_n \, d\mathbf{S}).$$

Здесь интеграл с кружком означает интегрирование по всей *замкнутой* поверхности.

Разделим этот поток на объем o, заключающийся *внутри* поверхности **S**:

$$\frac{N}{o}=\frac{\oint \mathbf{v}_n\, d\mathbf{S}}{\int do}.$$

Это будет некоторая *средняя* величина потока N, приходящаяся на единицу объема, заключенного внутри поверхности S.

Если ограниченный нами объем брать все меньше и меньше, то в пределе, для бесконечно малого объема около точки P поля, мы получим некоторую величину

$$\rho=\lim\left[\frac{\oint \mathbf{v}_n\, d\mathbf{S}}{o}\right],$$

которую называют *расхождением* вектора $\mathbf{v}$ в точке P.

Расхождение вектора принято обозначать знаком div (divergence):

$$\rho=\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Величина ρ есть *скалар* и образует *скаларное* поле в данном векторном поле.

Ниже мы покажем, как можно получить выражение div $\mathbf{v}$ в любой системе координат.

70. Теорема Гаусса. Представим себе опять замкнутую поверхность S конечных размеров, внутри которой заключен объем o.

Для каждого элемента объема do мы можем написать согласно предыдущему параграфу

$$d\left(\oint(\mathbf{v}_n d\mathbf{S})\right)=\rho\, do.$$

Если просуммировать, т.-е. проинтегрировать это выражение по всему объему o, то справа мы получим

$$\int \rho\, do.$$

Слева же нам нужно будет взять сумму всех потоков, пронизывающих оболочки всех элементарных объемов do. При этом по тем частям этих оболочек, которые окажутся внутри объема o и кото-

рые служат границами двух соседних объемов do, мы должны будем интегрировать два раза. Но если для элемента объема do_1 (рис. 66) наружная нормаль — n_1, то для элемента объема do_2 наружная нормаль n_2 будет направлена в противоположную сторону. Поэтому оба потока будут противоположных знаков и в сумме взаимно уничтожатся. В результате у нас останутся только те элементарные потоки, которые проходят сквозь *наружную* поверхность S.

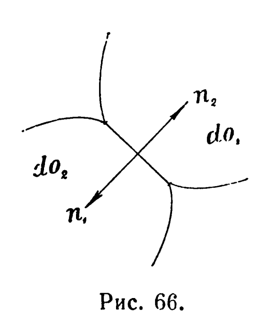


Рис. 66.

Следовательно, имеем

$$\oint (\mathbf{v}_n \cdot d\mathbf{S}) = \int \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot do.$$

Это уравнение представляет собою теорему Гаусса.

По этой теореме мы имеем возможность интеграл, взятый по любой замкнутой поверхности, проведенной как угодно в поле, преобразовать в интеграл, взятый по *объему*, заключающемуся *внутри* этой поверхности; при этом нужно только $\mathbf{v}_n$ заменить через $\operatorname{div} \mathbf{v}$.

71. Поле потока жидкости. Для того, чтобы получить более наглядное представление о величине ρ, положим, что мы имеем дело с *несжимающейся* и *нерасширяющейся* жидкостью, которая образует непрерывное поле скоростей $\mathbf{v}$. Если мы, проведя внутри этой жидкости какую-либо замкнутую поверхность, найдем, что полный поток из этой поверхности положителен, т.-е. что из нее вытекает жидкости больше, чем втекает, то это покажет нам, что *внутри* нашей поверхности имеются какие-либо *источники*. Положим, что каждый кубический сантиметр поля источников дает ежесекундно ρ cm^3 жидкости, — ρ называется плотностью источников поля; тогда весь объем, заключенный *внутри* проведенной нами поверхности, будет давать ежесекундно объем жидкости

$$N = \int \rho do.$$

Конечно точно такой же объем будет ежесекундно вытекать из поверхности S, потому что жидкость несжимаема и ей некуда

больше деваться. Следовательно, поток жидкости сквозь нашу поверхность должен равняться N:

$$\oint (\mathbf{v}_n \, . \, d\mathbf{S}) = \int \rho do.$$

Это и есть теорема Гаусса.

Что касается до источников, находящихся в поле вне поверхности S, как, например, источник O (рис. 67), то подобные источники тоже будут посылать жидкость сквозь поверхность S, но у точек ab эта жидкость будет *втекать* в поверхность, в то же время около cd она будет вытекать из поверхности и притом в таком же количестве. Первый поток будет отрицательным, а второй такой же величины, но положительным; в результате полный поток от *внешнего* источника всегда будет равен нулю.

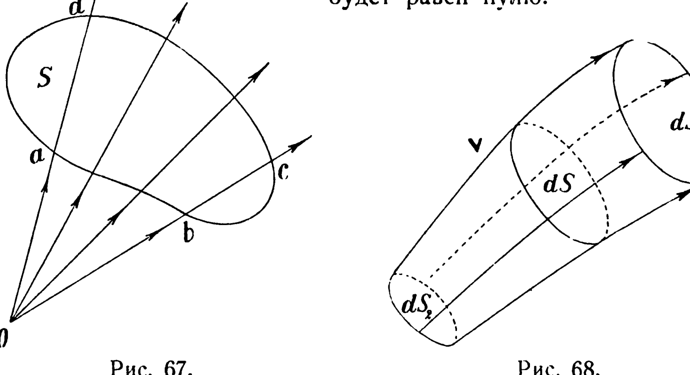


Рис. 67.

Рис. 68.

Таким образом при вычислении *полного* потока сквозь *замкнутую* поверхность в векторном поле *внешние* источники можно не принимать во внимание.

Заметим, что плотность источников ρ может быть, вообще говоря, для различных точек поля различною не только по величине, но и по знаку. Отрицательное значение ρ в нашей иллюстрации, т.-е. в текущей жидкости, означало бы, что данный элемент объема не испускает из себя жидкость, а, наоборот, поглощает ее. Для некоторых точек поля ρ может быть равно нулю и, как увидим ниже, ρ не ограничено условием непрерывности и конечности.

72. Векторная трубка. Выделим в поле, *где нет источников*, очень тонкую трубкообразную поверхность, составленную из векторных линий (рис. 68), и ограничим ее двумя нормальными к этим

линиям сечениями dS_1 и dS_2. Проведенная нами поверхность замкнутая и внутри себя не содержит источников. Поэтому полный поток сквозь эту поверхность должен быть равен нулю. Но сквозь боковую поверхность нашей трубки нет потока, потому что в ней лежат векторные линии и $\cos(vn) = 0$. Сквозь сечение dS_2 происходит втекание, а сквозь сечение dS_1 вытекание жидкости и притом в том же ежесекундном количестве, поэтому

$$v_1 dS_1 - v_2 dS_2 = 0,$$

или

$$v_1 dS_1 = v_2 dS_2.$$

Вообще через любое сечение векторной трубки количество (объем) ежесекундно протекающей жидкости будет одно и то же. Мы можем, следовательно, отметить основное свойство векторной трубки в тех местах поля, где нет источников, а именно: поток вдоль всей векторной трубки постоянен:

$$\mathbf{v}_n d\mathbf{S} = \text{Const.}$$

Это свойство остается верным и для трубок конечной толщины, так что его можно выразить интегралом

$$\int (\mathbf{v}_n d\mathbf{S}) = \text{Const.}$$

Отсюда заключаем, что там, где трубка шире, $\mathbf{v}$ должно быть меньше, и где трубка сужается, векторные линии делаются гуще и поле вектора $\mathbf{v}$ делается сильнее.

Мы говорили в **§ 64** (стр. 63), что при графическом изображении поля *густота* линий должна соответствовать величине градиента. Мы исполним это требование, если проведем в поле трубки *одинаковых потоков* ($\mathbf{v}d\mathbf{S}$). Действительно, тогда расстояние между границами смежных трубок (т.-е. dS) будет тем больше, и линии на чертеже будут тем дальше друг от друга, чем v меньше, и, наоборот, где v больше (dS будет меньше), там линии будут *гуще*.

73. Непрерывность векторных линий. Сопоставляя теорему о постоянстве потока в векторной трубке с тем, что мы говорили раньше (стр. 63, **64**) о густоте векторных линий, мы можем сказать, что *число* векторных линий вдоль трубки *постоянно*. А это

означает, что в поле, где нет источников, каждая линия проходит *не прерываясь*.

Начинаться векторная линия может только в положительных источниках, а кончаться только в отрицательных источниках.

Если дано поле совершенно без источников, то, если вектор $\mathbf{v}$ не везде равен нулю, в поле могут быть векторные линии, но без начала и без конца; они могут быть *замкнутыми* кривыми. Мы уже сказали (стр. 67, **67**), что такое поле называется *вихревым* полем; оно не имеет однозначного потенциала.

Бывают, впрочем, случаи, когда линии поля не замкнуты и все же не имеют явных концов, потому что все источники находятся на бесконечно большом расстоянии. Этот случай конечно надо иметь в виду.

Если же в поле совсем нет источников ни на конечном расстоянии ни в бесконечности и нет вихрей, т.-е. в нем нет ни разомкнутых ни замкнутых, то, очевидно, все поле равно нулю.

Иногда приходится рассматривать поле *ограниченных* размеров, у которого источники размещены за границами поля. В таких случаях можно действительные источники заменить фиктивными, расположив их там, где векторные линии пересекают границы поля (см. теорему Грина).

74. Теорема Гаусса в декартовых координатах. Теорема Гаусса:

$$\oint(\mathbf{v}_n \,.\, d\mathbf{S}) = \int \operatorname{div} \mathbf{v} \,.\, do,$$

при чем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d \oint (\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{S})}{do},$$

написана нами в такой форме, что выражаемое ею соотношение имеет определенный геометрический смысл, совершенно *независимо* от выбора той или иной системы координат.

Выразим эту теорему в прямолинейных прямоугольных координатах. Возьмем для этого в интересующей нас точке поля O элементарный параллелепипед $dxdydz$ (рис. 69) и определим поток вектора сквозь все шесть граней этого параллелепида.

Поток вектора $\mathbf{v}$ сквозь грань $dydz$, лежащую в плоскости YZ, будет равен

$$dN_1 = -vxdydz.$$

Здесь знак минус означает втекание внутрь объема $dxdydz$.

Поток сквозь такую же площадку $dydz$, но проходящую не через начало координат O, а через точку (1), находящуюся на расстоянии dx от начала, будет

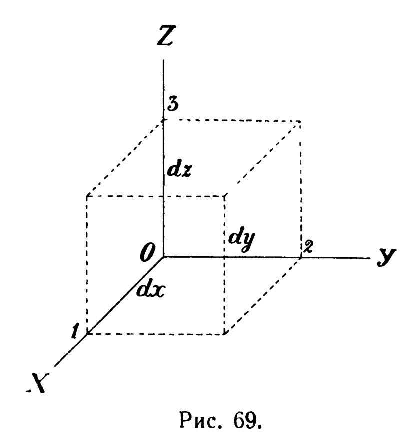


Рис. 69.

$$dN_2 = + v_x' dydz,$$

где v_x' есть нормальная к площадке $dydz$ составляющая вектора $\mathbf{v}$ в точке (1). Величина v_x' может вообще отличаться от v_x. Если приращение вектора v_x при переходе от точки (O) к точке (1), т.-е. на длину dx, обозначить через ∂v_x, то приращение v_x на единицу длины при этом переходе будет равно $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, а полное приращение на всю длину dx будет $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$. Следовательно, мы можем написать, что

$$v_x' = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$$

и

$$dN_2 = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dydz.$$

Заметим, что $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ есть частная производная от v_x по x. Это означает, что если v_x представлена как функция x, y, z, то производная по x берется, принимая y и z постоянными.

Складывая dN_2 с dN_1, получаем поток вектора $\mathbf{v}$ сквозь две параллельные площадки $dydz$ нашего параллелепипеда:

$$dN_1 + dN_2 = \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz.$$

Производя подобные же вычисления для двух площадок $dzdx$ и для двух площадок $dxdy$ и складывая все вместе, получаем весь поток для всего элементарного параллелепипеда $dxdydz$:

$$dN = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Разделив это на элемент объема $dxdydz$, получаем выражение для расхождения вектора $\mathbf{v}$ в рассматриваемой точке в декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Совершенно аналогичным образом можно получить выражения для $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и в других системах координат (см. ниже).

Для тех частей поля, где нет источников, мы имеем для вектора $\mathbf{v}$ дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

75. Примечание. В электростатике поле образовано электрическими зарядами e, которые и служат ему источниками. Так называемая электростатическая индукция этого поля на расстоянии r от заряда равна

$$D = \frac{e}{r^2}.$$

Полный поток индукции сквозь шаровую поверхность $4\pi r^2$ с центром в e будет равен

$$D 4\pi r^2 = 4\pi e.$$

Между тем, по терминологии предыдущего параграфа, этот поток должен был бы равняться силе источника, т.-е. равняться e. Соответственно с этим и плотность источников в электростатике будет $4\pi\rho$, хотя плотность электричества равна ρ. В настоящее время большинство придерживается обозначения, принятого в электростатике, а потому и мы введем во все наши уравнения поля множитель 4π и будем писать

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 4\pi\rho.$$

76. Уравнение Лапласа-Пуассона. Доказанная нами в предыдущих параграфах теорема Гаусса и все дальнейшие рассуждения о векторных линиях применимы к любому векторному полю. Но если данное нам векторное поле имеет потенциал, т.-е. если

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

обращается в уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho,$$

или

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho.$$

Это соотношение между скаларами φ и ρ носит название уравнения Пуассона. Для тех точек поля, где нет источников $\rho = 0$, оно переходит в так называемое уравнение Лапласа.

Оба эти уравнения играют громадную роль в теории поля, и решением их занимается обширный отдел математики.

Итак, мы можем резюмировать: если в данном нам поле

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0,$$

то можно положить

$$\mathbf{v} = -\nabla \varphi,$$

и тогда имеет место уравнение Лапласа-Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho.$$

77. Однозначность решения уравнения Лапласа-Пуассона. Не останавливаясь пока на различных случаях решения уравнения Лапласа-Пуассона, приведем доказательство одной общей теоремы, которая имеет для нас практическое значение.

Пусть дано потенциальное поле, простирающееся до бесконечности, и в нем даны все источники ρ. Положим, что мы нашли (случайно или как-нибудь иначе) некоторое значение φ_1, удовлетворяющее уравнению Пуассона, так что в каждой точке поля

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho.$$

Далее, предположим, что для того же поля ρ каким-либо способом найдено еще другое значение φ_2, для которого можно тоже написать

$$\nabla^2 \varphi_2 = -4\pi\rho.$$

Тогда, вычитая одно уравнение из другого, получаем для всего поля

$$\nabla^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Это означает, что полученное поле $(\varphi_1 - \varphi_2)$ не имеет нигде источников. Но без источников не может быть линий сил, из них исходящих. А так как, кроме того, в потенциальном поле и

$$\text{curl}\,\mathbf{v} = 0,$$

т.-е. нет и замкнутых векторных линий, то, значит, в результирующем поле $(\varphi_1 - \varphi_2)$ вообще нет никаких векторных линий, т.-е. это поле равно нулю. Это означает, что для всех точек поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{Const}.$$

т.-е. что оба наших решения равнозначны, потому что прибавка ко всем потенциалам поля одной и той же постоянной величины не имеет значения.

Итак, мы приходим к заключению, что если нам удалось найти одно решение φ уравнения

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho,$$

удовлетворяющее всем условиям задачи, то это решение единственное.

Это обстоятельство, конечно, очень важно практически, потому что иногда можно найти решение задачи на основании побочных, чисто физических, соображений или по аналогии с известными уже случаями; однако, найдя одно какое-либо решение, мы можем быть уверены, что оно *единственное*.

78. Теорема Грина. Полезно несколько обобщить теорему Гаусса. Мы нашли выше, что по этой теореме интеграл потока вектора, взятый по какой-либо замкнутой поверхности, можно представить в виде интеграла, взятого по объему, ограниченному этою поверхностью, при чем под объемным интегралом вместо вектора $\mathbf{v}$ появляется скалар div $\mathbf{v}$. При этом под потоком жидкости мы подразумевали *объем* жидкости, протекающий сквозь площадку dS в секунду

$$(\mathbf{v}_n d\mathbf{S}).$$

Но можно интересоваться не *объемом*, а *массой* протекающей ежесекундно жидкости; в таком случае необходимо будет умножить этот объем на плотность жидкости. Обозначим плотность жидкости через δ и для общности предположим, что δ не везде в поле одинакова, а представляет собою некоторую функцию координат — $\delta = \psi(x, y, z)$, т.-е. образует собою скаларное поле ψ подобно скаларному полю φ.

Вместо потока вектора $\mathbf{v}$ нам теперь нужно исследовать поток вектора $\psi\mathbf{v}$. К этому полю мы можем опять применить теорему Гаусса (стр. 71, **70**):

$$\oint \psi \mathbf{v}_n d\mathbf{S} = \int \operatorname{div}(\psi\mathbf{v}) do$$

$$\oint \psi \frac{d\varphi}{dn} d\mathbf{S} = \int (\nabla\psi \cdot \nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi) do.$$

Это и есть обобщенная формула Гаусса, или формула Грина. Грин нашел эту общую формулу раньше, чем Гаусс нашел формулу § 70.

Для $\psi = 1$ она обращается в формулу Гаусса.

Из этой формулы мы можем получить следующие два следствия, которые нам скоро понадобятся.

Во-первых, положим $\psi = \varphi$; тогда можем написать (*вторая* формула Грина)

$$\int (\nabla\varphi)^2 \cdot do = \oint \varphi \frac{d\varphi}{dn} \cdot d\mathbf{S} - \int \varphi\nabla^2\varphi \cdot do.$$

Во-вторых, переставив φ и ψ, получаем

$$\oint \varphi \frac{d\psi}{dn} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\nabla^2\psi) do$$

и, вычтя из первого уравнения, имеем симметричную формулу (*третью* формулу Грина)

$$\oint \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn}\right) d\mathbf{S} = \int (\psi \cdot \nabla^2\varphi - \varphi \cdot \nabla^2\psi)\, do.$$

Как для формулы Гаусса необходимо условие конечности и непрерывности вектора $\mathbf{v}$, так и для формулы Грина, где входят производные от φ и ψ, необходимо условие непрерывности и конечности φ и ψ и их градиентов.

79. Применение формулы Грина к ограниченному полю. Последняя формула Грина дает нам возможность определить потенциальное поле φ_0 в любой точке пространства, ограниченного какою-либо замкнутою поверхностью, когда даны все источники внутри этой поверхности и даны потенциалы и их градиенты на пограничной поверхности. Наружных источников при этом знать не нужно.

Для решения этой задачи воспользуемся третьей формулой Грина, положив в ней

$$\psi = \frac{1}{r},$$

где r есть расстояние любой точки Q поля от начала координат. Начало координат можно, конечно, предполагать тоже в любой точке поля P, и написанное выше r есть не что иное как расстояние между двумя точками поля PQ.

Легко убедиться в том, что функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi = 0.$$

Действительно,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

Складывая три подобных выражения для x, y, z, получаем

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + 3\,\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = 0.$$

Если это принять во внимание, то формула Грина дает

$$\oint\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right)d\mathbf{S} = -4\pi\int\frac{\rho}{r}\,do.$$

В начале координат $\frac{1}{r}$ равно бесконечности. Для того чтобы поле у нас было везде конечным, выделим эту точку из поля, окружив ее

какою-либо беспредельно уменьшающеюся поверхностью, и применим формулу Грина к оставшемуся объему, который теперь будет ограничен двумя поверхностями: наружной S и внутренней, выделяющей начало координат. Поэтому и поверхностный интеграл распадется иа две части, одна из которых будет прежняя, а другая будет интеграл по внутренней поверхности; последнюю выберем в виде сферы с радиусом r_o и центром P. Введем сферические координаты, положив $dS = r_o^2 d\omega$, где $d\omega$—элемент телесного угла, под которым видна из центра сферы элементарная площадка dS, помещающаяся на поверхности этой сферы. Для поверхности нашей сферы

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{r} = -\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}.$$

Знак — перед производной по r здесь получается потому, что в данном случае нормаль, наружная по отношению к объему интегрирования, направлена *внутрь* нашей сферы; поэтому $dn = -dr$. Поток будет равен

$$\oint\left(\frac{1}{r_o}\frac{d\varphi_o}{dn} - \varphi_o\frac{1}{r^2}\right)dS = \oint\left(r_o\frac{d\varphi}{dn} - \varphi_o\right)d\omega.$$

При беспредельном уменьшении радиуса r_o нашей малой сферы первый член в интеграле справа обращается в нуль, а второй после интегрирования по всей сфере, т.-е. по углу 4π, дает $4\pi\varphi_o$, где φ_o есть значение потенциала в начале координат. Следовательно, имеем

$$\varphi_o = \int\frac{\rho}{r}\,do + \frac{1}{4\pi}\oint\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right)d\mathbf{S}.$$

Эта формула дает нам потенциал в начале наших координат, т.-е. в любой точке поля, если даны плотности всех источников ρ и их расстояния r до рассматриваемой точки и кроме того даны потенциалы и нормальные составляющие их градиентов на пограничной поверхности.

Если пограничную поверхность удалить в бесконечность, а все источники находятся на конечном расстоянии, то для бесконечно удаленной поверхности φ будет бесконечно мало как $\frac{1}{r}$, а $\frac{d\varphi}{dn}$— бесконечно мало как $\frac{1}{r^2}$. Подъинтегральная величина

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \varphi\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right)$$

для бесконечно удаленной поверхности будет уменьшаться, будучи пропорциональной $\frac{1}{r^3}$, между тем как сама поверхность будет увеличиваться пропорционально r^2. В результате поток сквозь бесконечно удаленную поверхность будет уменьшаться, как $\frac{1}{r}$, и может быть принят равным нулю. В таком случае потенциал φ_o будет определен одними источниками

$$\varphi_o = \int \frac{\rho do}{r}.$$

80. Энергия потенциального поля. Вторая формула Грина

$$\int (\nabla\varphi)^2 do = \oint \varphi \frac{d\varphi}{dn} dS - \int \varphi \nabla^2 \varphi do$$

дает нам возможность получить два выражения для *энергии* физического поля. Обыкновенно энергия выражается произведением *двух* величин. Энергия есть скалар, а потому может быть выражена или произведением двух скаларов или скаларным произведением двух векторов; в частности — *квадратом* одного вектора.

Так, например, кинетическая энергия движущейся жидкости равна половине произведения ее массы на квадрâт скорости $\mathbf{v}$. Если плотность жидкости обозначить через δ, то масса элемента объема do будет δdo, а кинетическая энергия его будет $\delta \frac{\mathbf{v}^2}{2} do$. Кинетическая энергия какого-либо конечного объема жидкости, в различных точках которого δ и $\mathbf{v}$ могут быть различны, будет выражаться интегралом

$$T = \int \delta \frac{\mathbf{v}^2}{2} do,$$

который должен быть распространен на все поле вектора $\mathbf{v}$.

Коэффициент δ для излагаемой нами общей теории поля не имеет значения, мы могли бы его включить в величину вектора $\mathbf{v}$ или принять равным единице. Но, принимая во внимание, что расхождение вектора мы уже условились обозначать с *множителем* 4π, через $4\pi\rho$, а не просто ρ (стр. 77, **75**), будем писать теперь энергию поля (как это принято в электромагнетизме) с *делителем* 4π, т.-е.

$$T = \int \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi} do.$$

Если дано потенциальное поле, т.-е. если

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi,$$

тогда по второй формуле Грина, принимая поток сквозь бесконечно удаленную поверхность равным нулю, получаем

$$T = \int \frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi}\, do = -\int \frac{\varphi\nabla^2\varphi}{8\pi}\, do.$$

Но по уравнению Лапласа-Пуассона

$$-\nabla^2\varphi = 4\pi\rho.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi}\, do = \int \frac{\varphi\rho}{2}\, do.$$

Здесь с левой стороны у нас энергия поля выражена через вектор $\mathbf{v}$, и интеграл распространен по объему всего поля $\mathbf{v}$; справа у нас та же энергия выражена через потенциалы φ и плотности ρ источников. Этот последний интеграл не нужно брать по всему полю $\mathbf{v}$, а достаточно взять по тем объемам поля, где имеются источники. Величина

$$U = \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi},$$

т.-е. энергия единицы объема поля, называется *плотностью энергии* поля.

81. Источники в отдельных точках. Если точка P, для которой мы вычисляем потенциал, отстоит очень далеко от источника и сам источник занимает сравнительно с расстоянием r очень малый объем, то можно считать расстояние r для всего источника одним и тем же и вынести $\frac{1}{r}$ за знак интеграла. Если, кроме того, положить

$$e = \int \rho\, do,$$

тогда получим

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

и

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{e}{r^2}.$$

В этом случае вектор **v** будет направлен по радиусу r, и величина его будет обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

Если источников несколько, то

$$\varphi=\sum\frac{e}{r}.$$

Эту сумму нужно распространить на все источники поля.

Можно проверить непосредственной подстановкой, что в поле вне источников эта величина $\varphi=\frac{e}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi=0.$$

Для этого необходимо положить

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

и взять сумму вторых производных этой величины по x, по y и по z.

Но для таких случаев поля, когда источники расположены в отдельных точках и потенциал зависит только от расстояния r, можно представить уравнение Лапласа в несколько ином виде. Если

$$\varphi=f(r),$$

то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогичные выражения получим для вторых производных по y и по z.

Сложив три таких выражения вместе, получим

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi).$$

Теперь по этому уравнению прямо видно, что если

$$\varphi = \frac{e}{r},$$

то для точек вне источника мы получаем уравнение Лапласа и притом в следующем виде

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = 0.$$

Определив по данным источникам e потенциал φ, мы имеем возможность вычислить и все поле вектора $\mathbf{v}$ по уравнению

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{d\varphi}{dn}.$$

Так именно и поступают в теории тяготения и в электростатике и вообще во всех случаях, где имеет место закон о действии сил обратно пропорционально квадрату расстояния.

82. Поле сил при любой зависимости от расстояния. Мы начали изучение свойств векторного поля в самом общем виде, с тем лишь ограничением, что это поле имеет потенциал ($\operatorname{curl}\mathbf{v} = 0$), т.-е. что в поле нет замкнутых векторных линий. Теперь мы пришли к заключению, что в таком поле источники действуют обратно пропорционально квадрату расстояния. Таким образом выходит, что закон действия обратно пропорционально квадратам расстояния имеет как бы универсальное значение для всех полей и что другие законы невозможны. Это не совсем так, и для того, чтобы уяснить себе — в чем тут дело, предположим, что нам дано векторное поле $\mathbf{A}$, при чем величина этого вектора для каждой точки поля есть некоторая функция $f(r)$ расстояния r данной точки от начала координат. Направление этого вектора пусть будет везде радиальное. Итак, пусть

$$\mathbf{A} = f(r), \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Проекции этого вектора на оси координат будут

$$A_x = \frac{x}{r}f(r), \qquad A_y = \frac{y}{r}f(r), \qquad A_z = \frac{z}{r}f(r).$$

Расхождение этого вектора должно быть равно $4\pi\rho$, но

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=f(r)\left[\frac{3}{r}-\frac{1}{r^2}\left(x\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z}\right)\right]+$$

$$+f'(r)\,\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z}\right),$$

а так как

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r};\qquad x\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=r,$$

то

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=f(r)\frac{2}{r}+\frac{\partial f}{\partial r}=4\pi\rho.$$

Это означает, что если бы нам дали такое поле вектора $\mathbf{A}$, в котором величина A представлена как некоторая функция $f(r)$ расстояния от начала координат, то мы считали бы, что источники этого поля находятся не только в начале координат, как это могло бы показаться на основании задания, но что они распределены *во всем поле* с плотностью $4\pi\rho$, вычисленной выше, и что каждый элементарный объем этого поля действует обратно пропорционально *квадратам* расстояния.

Только в том случае, если само поле вектора $\mathbf{A}$ задано по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, т.-е. если

$$f(r)=\frac{1}{r^2}\qquad \text{и}\qquad \frac{df}{dr}=-\frac{2}{r^3},$$

мы получим во всем поле вне начала координат $\rho=0$, т.-е. мы будем считать источник только в начале координат.

83. Источники в точках, на линиях и на поверхности. Мы только что видели, что если источником является настолько малый объем, что в сравнении с расстоянием r до точки P поля его можно считать бесконечно малым, тогда с математической точки зрения источником служит точка, и потенциал источника e, сосредоточенного в одной точке, преобразуется так

Рис. 70.

$$\varphi=\int\frac{\rho\,do}{r}=\frac{1}{r}\int de=\frac{e}{r},$$

а потенциал источников, распределенных в нескольких точках

$$\varphi = \sum \frac{e}{r}.$$

Точки, в которых сосредоточены источники, или массы, или заряды e поля, называют часто *полюсами*. Термин *масса* перешел в теорию поля из теории тяготения, а термин *полюс* и *заряд* — из теории магнетизма.

Итак, для вычисления потенциала нужно массу каждого полюса разделить на соответствующее расстояние и все это сложить вместе.

Если массы занимают очень тонкую (опять в сравнении с r) трубочку, тогда, обозначив элемент длины этой трубочки через dl

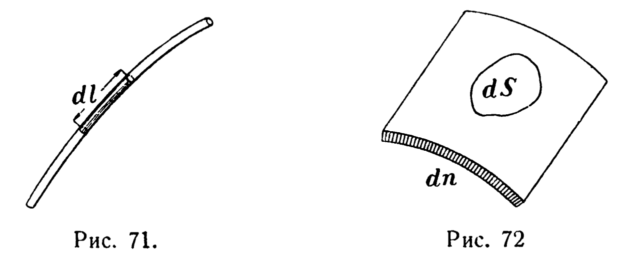


Рис. 71. Рис. 72

(рис. 71), а поперечное, т.-е. нормальное к dl сечение, через dS, получим

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r} dS dl.$$

Здесь величину ρdS мы можем назвать массою единицы *длины* трубочки или *линейною плотностью* источников i и написать

$$\varphi = \int \frac{i}{r} dl.$$

Наконец, если объем источников представляется в виде очень тонкой пластинки (рис. 72) толщиной dn, тогда произведение ρdn будет масса единицы *поверхности*, которую мы можем обозначить через σ. Потенциал источников, распределенных на поверхности, можно изобразить формулою:

$$\varphi = \int \frac{\sigma}{r} dS.$$

Во всех случаях — для объемов, для точки, линии и поверхности — величины ρ, e, i, σ, должны быть конечными, но они не должны быть непременно непрерывными.

84. Прерывность вектора v в поле. Пока мы рассматривали только конечные объемы, у нас поле было непрерывно, т.-е. φ и **v** были конечные и непрерывные функции координат. Но мы уже видели, что, если предполагать источник сосредоточенным в точке, то $\varphi = \frac{c}{r}$ для этих точек делается бесконечно большим.

Это не нужно упускать из виду и, как это мы уже делали (стр. 81, **79**), необходимо выделять эти точки из поля небольшою окружающею шаровою поверхностью. Нечто подобное мы имеем и в случае источников, расположенных по линиям. Эти линии тоже приходится выделять из поля тонкими трубками, чтобы не иметь дело с потенциалом бесконечной величины, с которым нельзя производить никаких расчетов.

Исследуем, что происходит около поверхностного слоя.

Если слой mm (перпендикулярный к чертежу 73) представляет собою источник, то *его* векторные линии будут итти от него в обе стороны — и по положительной нормали, и по отрицательной. Вырежем в слое mm небольшую площадку dS, построим на ней бесконечно низкий нормальный к dS цилиндрик $abcd$ и применим к этой цилиндрической поверхности теорему Гаусса.

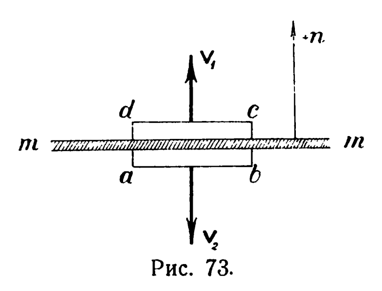


Рис. 73.

Потоки сквозь два основания цилиндра будут соответственно $v_1 dS$ и $v_2 dS$. Поток же сквозь его боковую поверхность будет равен нулю, потому что боковая поверхность взята *вдоль* векторных линий. Кроме того, боковая поверхность бесконечно мала в сравнении с основаниями цилиндра. Источник, заключенный внутри этой поверхности, будет $4\pi\sigma dS$. По теореме Гаусса после сокращения на dS, получим

$$v_1 + v_2 = 4\pi\sigma.$$

Величина v_2 взята со знаком $+$, что означает вытекание; вектор $\mathbf{v}_2$ направлен по *наружной* и, следовательно, положительной нормали цилиндрика. Полезно будет ввести в эту формулу не наружные

нормали цилиндрика, а нормали нашего слоя *mm* (рис. 73). Если положительную нормаль взять по $\mathbf{v}_1$, то $\mathbf{v}_2$ окажется направленным по *отрицательной* нормали слоя *mm*, и мы должны будем написать

$$v_{n1} - v_{n2} = 4\pi\sigma.$$

Если кроме нашей площадки в поле находятся еще и другие источники, то их векторные линии пройдут наш слой не прерываясь. Поэтому в результирующем поле всех источников, включая и наш слой *mm*, *касательные* к *mm*, составляющие поля, останутся без перерыва

$$v_{t1} - v_{t2} = 0,$$

между тем как *нормальные* составляющие результирующего поля будут иметь именно этот перерыв

$$v_{n1} - v_{n2} = 4\pi\sigma.$$

Наоборот, если бы нам дали векторное поле, в котором имеются поверхности, где вектор $\mathbf{v}$ прерывен, т.-е. имеет на двух сторонах одной и той же поверхности разные значения своих нормальных составляющих, то мы при расчетах поля могли бы считать эти поверхности за источники с поверхностною плотностью

$$\sigma = \frac{v_{n1} - v_{n2}}{4\pi}.$$

85. Поле биполя. Рассмотрим поле, составленное из двух полюсов с равными и противоположными по знаку источниками $\pm e$, находящимися на расстоянии $\mathbf{l}$, друг от друга. (Нечто подобное мы имеем в магнитной стрелке компаса.) Величину $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ называют моментом этих двух полюсов $\pm e$.

Момент $\mathbf{p}$, так же как и длина $\mathbf{l}$, есть вектор.

Потенциал обоих источников $\pm e$ в некоторой точке P (рис. 74) поля будет

$$\varphi = e\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = e\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Предположим теперь, что расстояние между полюсами $\mathbf{l}$ очень мало в сравнении с r, но не равно нулю, так что величина момента $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ все же остается конечною. Тогда мы можем положить в числителе

$$r_1 - r_2 = \mathbf{l}\cos\alpha,$$

а в знаменателе

$$r_1 r_2 = r^2,$$

и получим потенциал так называемого *биполя*, или *двойного полюса*

$$\varphi = \frac{p \cos \alpha}{r^2}.$$

Зная потенциал, мы можем получить и поле его отрицательного градиента

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{d\varphi}{dn}.$$

Разложим этот вектор на две составляющие, из которых одну возьмем по радиусу

$$v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = p\,\frac{2 \cos \alpha}{r^3},$$

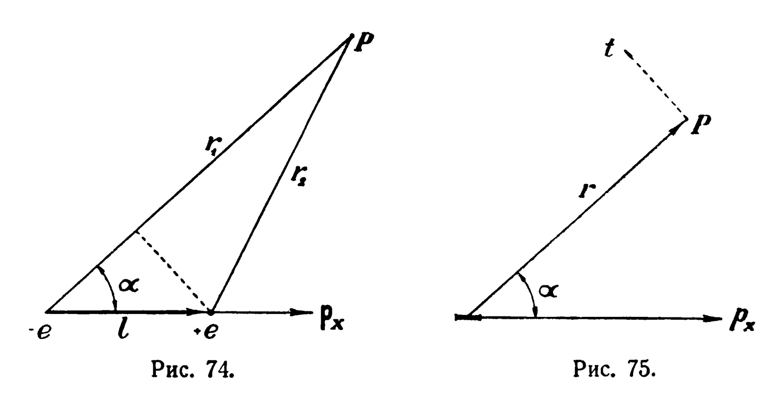


Рис. 74. Рис. 75.

а другую по касательной t к окружности радиуса r в плоскости (pr) (рис. 75)

$$v_t = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \alpha} = p\,\frac{\sin \alpha}{r^3}.$$

Из этих формул мы видим, что поле вектора $\mathbf{v}$ распределено в общем обратно пропорционально *кубу* расстояния от биполя. Но это поле не одинаково по всем направлениям от точки O, оно есть не только $f(r)$, но также и $f(\alpha)$.

По направлению момента биполя p_x, когда $\alpha = 0$, поле направлено по радиусу и равно

$$v_r = \frac{2p}{r^3}, \qquad v_t = 0.$$

По направлению, перпендикулярному к p_x, поле перпендикулярно к радиусу и равно

$$v_r = 0, \qquad v_t = \frac{p}{r^3},$$

т.-е. вдвое меньше, чем в предыдущем случае.

В других точках вектор **v** будет равен

$$v = \frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha},$$

а угол его наклона β к радиусу вектору определится из уравнения

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_r}{v_t} = 2\cot\alpha.$$

Линии векторного поля биполя имеют следующий вид (рис. 76).

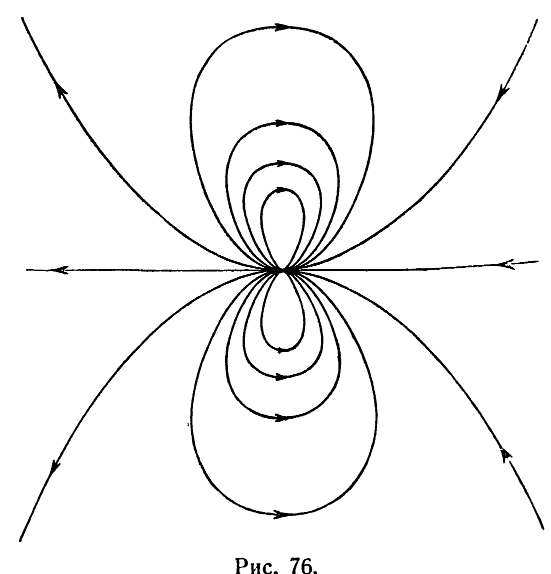


Рис. 76.

86. Биполи высшего порядка. Подобно тому, как от потенциала *полюса* мы перешли путем дифференцирования к потенциалу *биполя*, точно так же от потенциала биполя мы можем перейти к потенциалу *двойного* биполя, а при дальнейшем дифференцировании можем получить биполи высших порядков.

Разберем простейшие случаи.

Мы знаем, что потенциал полюса $\pm e$ равен

$$\varphi = \pm\frac{e}{r}.$$

Раздвинем два совпадающих полюса $\pm e$ по оси X на длину dx_1. Получим биполь с моментом

$$p_x \quad e dx_1$$

и его потенциал

$$\varphi = \lim e\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = -p_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Раздвинем теперь два совпадающих биполя $\pm p_x$ по оси X (рис. 77) на длину dx_2. Произведение $p_x dx_2$ обозначим через p_{xx}.

Потенциал этих двух биполей при беспредельном уменьшении dx_2 будет

$$\varphi'_x = \lim. - p_x \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_1} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_2} \right] = -(p_x dx_2)\frac{\partial^2}{dx^2}\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= -p_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}.$$

Если же мы раздвинем те же биполи по оси Y (рис. 78) на длину dy или по оси Z на длину dz, то получим

$$\varphi'_y = -p_{xy}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\varphi'_z = -p_{xz}\frac{\partial}{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

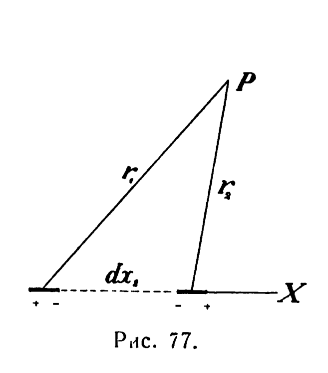


Рис. 77.

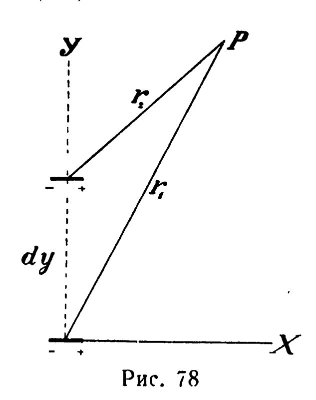


Рис. 78

Продолжая таким образом далее, мы можем получить потенциалы биполей любого n-го порядка

$$\varphi_n = p_n \frac{\partial^n}{\partial x^i\, \partial y^k\, \partial z^m}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Легко видеть, что каждый подобный потенциал в тех частях поля, где нет биполей, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

потому что $\frac{1}{r}$ удовлетворяет этому уравнению.

Наконец, вследствие линейности уравнения Лапласа, ему будет удовлетворять и любая сумма из подобных потенциалов биполей различного порядка

$$\varphi = \Sigma \varphi_n.$$

87. Различные выражения для потенциала биполя. Потенциал биполя играет очень большую роль в теории физического поля, при чем для различных случаев выражения этого потенциала могут принимать различный вид. Для более легкого запоминания, а также для большей наглядности мы сопоставим здесь эти формулы.

Для потенциала биполя мы вывели формулу (стр. 90, **85**)

$$\varphi = \frac{edl \cos \alpha}{r^2} = \frac{p \cos \alpha}{r^2}.$$

Если принять во внимание, что

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla \frac{1}{r}$$

есть вектор, направленный по радиусу r, то потенциал φ легко представить в виде скалярного произведения

$$\varphi = -\left(\mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r}\right).$$

Заметим, что вектор $\nabla \frac{1}{r}$ направлен в ту сторону, куда $\frac{1}{r}$ увеличивается или куда r уменьшается, т.-е. от точки P (рис. 75) по направлению к биполю. Мы можем, однако, заменить его вектором, направленным в ту же сторону, как и r (рис. 75), т.-е. от биполя наружу.

Если этот последний вектор обозначить через ∇_p, то

$$\nabla_p \frac{1}{r} = -\nabla \frac{1}{r},$$

и потенциал биполя будет равен

$$\varphi = \left(p \cdot \nabla_p \frac{1}{r}\right).$$

Подстановка ∇_p вместо $-\nabla$ в декартовых координатах выражается обыкновенно следующим образом.

Обозначим через x, y, z координаты точки P, для которой мы определяем потенциал, а через ξ, η, ζ координаты биполя; тогда

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial \zeta}.$$

Левые части этих равенств представляют собою проекции на оси координат вектора ∇, между тем как справа стоят проекции на оси координат вектора $-\nabla_p$.

Замену $-\nabla$ через $+\nabla_p$ мы можем выразить словами так: переход в соседнюю с P точкою поля на длину $+dl$ эквивалентен сдвигу источника поля e на длину $-dl$.

Этого, впрочем, и следовало ожидать, потому что поле зависит только от взаимного расстояния между точкою P и полюсом e.

Если написать потенциал биполя в декартовых координатах, то получим

$$\varphi = -p_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} - p_y \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} - p_z \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}.$$

В таком виде потенциал биполя составлен из трех потенциалов трех биполей p_x, p_y, p_z. Мы видим, что вообще перед тем, как вычислять потенциалы, мы можем разложить биполь, как и всякий вектор, на несколько составляющих, и, вычислив потенциалы каждой из этих составляющих, затем сложить их вместе. Иногда этот способ представляет некоторые удобства.

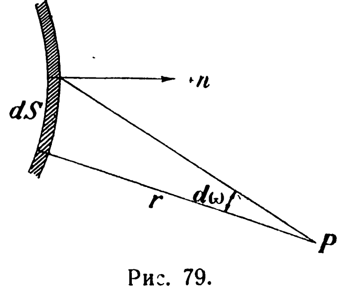


Рис. 79.

Теперь представим себе наш биполь не в виде элементарной линии с двумя зарядами $\pm e$, а в виде элементарного объема длиною dl и поперечного сечения dS (рис. 79). Пограничные сечения dS мы предположим заряженными поверхностною плотностью $\pm\sigma$. Следовательно, мы можем себе представить, что наш биполь образовался от сдвижения двух площадок dS, заряженных плотностью $\pm\sigma$, на расстояние dl.

В таком случае

$$e = \sigma dS$$

$$p = edl = \sigma dS\, dl = \sigma do.$$

Из последней формулы мы видим, что σ равна величине момента p, деленной на объем do. Назовем эту величину плотностью момента, или *поляризацией*, нашего биполя и обозначим ее через **P**. Поляризация **P**, так же как и момент **p**, есть вектор.

Теперь мы можем представить потенциал нашего биполя в таком виде:

$$\varphi = \frac{\sigma\, dSdl \cos\alpha}{r^2} = \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_p \frac{1}{r}\right) do.$$

Наконец, мы можем еще ввести в нашу формулу телесный угол $d\omega$ под которым видна площадка $+dS$ из точки P (стр. 37, **39**),

$$d\omega = \frac{dS \cos\alpha}{r^2};$$

обозначим еще через

$$\tau_1 = \sigma\, dl$$

поверхностную плотность биполей. Тогда получим для потенциала выражение

$$\varphi = \tau_1\, d\omega.$$

Все вышеприведенные формулы для потенциала биполя нам сейчас же пригодятся.

88. Поляризация. Иногда пространство бывает наполнено целою системой биполей, моменты которых в разных точках могут иметь различную величину и различное направление. Потенциал подобного поля будет равен сумме потенциалов всех биполей, его составляющих. Мы можем даже представить себе распределение биполей *непрерывным*, и тогда эти суммы обратятся в интегралы.

Возьмем какой-либо элементарный объем do и положим, что все биполи, в нем находящиеся, дают в среднем момент $\mathbf{P}do$. Величина **P** будет, следовательно, момент биполей в единице объема, или плотность, биполей. В электростатике и магнетизме эту величину называют *поляризацией*. Величина поляризации **P** будет, конечно, вектор, так же как и момент биполя **p**. Вектор **P** может образовать целое поле, и тогда это поле называется *поляризованным*.

Потенциал элемента объема подобного поля будет (см. 94, **87**)

$$d\varphi = \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_p \frac{1}{r}\right) do,$$

а потенциал какого-либо конечного объема будет

$$\varphi = \int \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_p \frac{1}{r}\right) do.$$

Здесь подъинтегральную величину мы можем представить еще так (стр. 54, **54**):

$$\left(\mathbf{P} \cdot \nabla_p \frac{1}{r}\right) = \nabla_p \left(\mathbf{P} \cdot \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} (\nabla \cdot \mathbf{P}).$$

Но

$$(\nabla \cdot \mathbf{P}) = \operatorname{div} \mathbf{P}$$

представляет собою отнесенный к единице обьема поток сквозь поверхность элементарного объема *do* (стр. 70, **69**). Так как объем *do* содержит только биполи, т.-е. столько же положительных источников, сколько и равных им отрицательных источников, то поток сквозь его поверхность должен быть равным нулю.

Итак, для поляризованного поля имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = 0,$$

т.-е. расхождение поляризации всегда равно нулю.

Приняв это во внимание, мы можем объемный интеграл

$$\varphi = \int \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_p \frac{1}{r}\right) do = \int \nabla \left(\mathbf{P} \cdot \frac{1}{r}\right) do$$

преобразовать в поверхностный

$$\varphi = \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right) do = \oint \frac{\mathbf{P}_n}{r} d\mathbf{S}.$$

Последний интеграл представляет собою потенциал источников, расположенных на поверхности (стр. 87, **83**) с поверхностною плотностью

$$\sigma = \mathbf{P}_n.$$

Полученное нами соотношение между поверхностною плотностью σ и поляризацией $\mathbf{P}$ означает, что если наше поляризованное поле имеет границы, то потенциал всех его биполей можно заменить потенциалом источников $\mathbf{P}_n$, расположенных на пограничной поверхности. Плотность этих источников равна нормальной составляющей поляризации $\mathbf{P}_n$ у пограничной поверхности.

Далее, мы знаем, что если источники расположены на поверхности (стр. 89, **84**), то у этих поверхностей нормальные составляющие градиента потенциала делаются *прерывными*. То же самое, следовательно, имеет место и на границах поляризованного поля.

89. Двойной слой. Теперь представим себе поляризованное тело в виде очень тонкого слоя, в котором поляризация, т.-е. плотность биполей направлена везде по положительной нормали к этому слою. Каждый элемент поверхности dS такого слоя будет представлять собою биполь, которого потенциал мы уже определили выше (стр. 94, **87**). Мы нашли его равным $\tau_1 d\omega$, где τ_1 — поверхностная плотность биполей, а $d\omega$ — телесный угол, под которым видна положительная сторона поверхности dS из точки P (рис. 80).

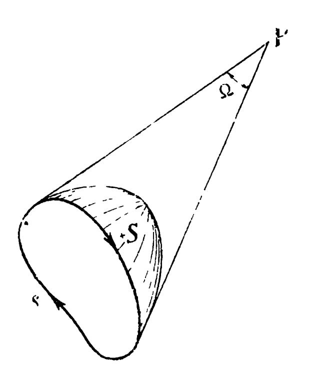


Рис. 80.

Если биполи образуют целый слой, то потенциал этого слоя будет

$$\varphi = \int \tau_1 d\omega.$$

Подобный слой, у которого по одну сторону расположены положительные источники, а по другую сторону им равные отрицательные источники, называется *двойным* слоем.

Обратим внимание на то, что $d\omega$ есть тот телесный угол, под которым видна из точки P *положительная* сторона площадки dS, т.-е. та сторона, из которой выходит *положительная* нормаль слоя и куда направлены *положительные* полюсы биполей.

90. Прерывность потенциала у двойного слоя. Будем подходить точкой P все ближе и ближе к поверхности двойного слоя. При этом угол $d\omega$ будет все расти и расти, и когда точка P совпадет с положительною стороною поверхности, конус (PdS) раскроется в плоский элемент поверхности dS, а угол $d\omega$ обратится в 2π.

Таким образом, для точки, лежащей на *положительной* стороне поверхности двойного слоя, потенциал элемента dS будет

$$\varphi_{+} = +2\pi\eta_n.$$

Точно таким же способом мы получим потенциал для точки, лежащей на отрицательной стороне двойного слоя; он будет равен

$$\varphi_{-} = -2\pi\eta_n.$$

Разность потенциалов с обеих сторон поверхности двойного слоя равна, следовательно

$$\varphi_{+} - \varphi_{-} = 4\pi\eta_n.$$

Отсюда видим, что потенциал у подобных двойных слоев *прерывен* и что прерывность потенциала равна 4π, умноженному на поверхностную плоскость биполей η_n, нормальных к этой поверхности.

Заметим, что величина η_n, а также и перерыв $(\varphi_{+} - \varphi_{-})$ может быть для различных точек поверхности различен.

Спрашивается теперь, каким же образом можно определять градиент потенциала φ, если он прерывен? — Градиент *конечной* величины мы можем получить только вне поверхности двойных слоев, или в непосредственной близости у поверхности, в самом же слое градиент будет бесконечен.

Аналогичный результат мы получили бы, если бы в местности, изображенной на плане (рис. 60, стр. 64, **65**), была стена или ров с вертикальными стенками. Тогда одной и той же точке на плане соответствовало бы *две* высоты, а градиент, т.-е. уклон местности, $\operatorname{tg}\alpha$ был бы здесь бесконечен ($\alpha = 90°$). Тем не менее с обеих сторон стены уклоны местности могли бы быть конечными.

91. Двойной слой равномерной плотности. Если плотность биполей η на всей поверхности одна и та же, то ее можно вынести за знак интеграла (см. стр. 98, **89**), и мы получим

$$\varphi = \eta\Omega,$$

где Ω есть тот угол, под которым из точки P видна вся положительная сторона поверхности. Если поверхность незамкнутая, то Ω — это тот угол, под которым из точки η виден пограничный контур s поверхности S. Если сама поверхность не дана, а дан лишь ее контур, то необходимо дать этому контуру s тоже опре-

деленное направление, иначе знак телесного угла Ω останется неопределенным. Направление контура s должно быть взято по право-винтовой системе относительно положительной нормали к поверхности S, т.-е. относительно направления биполей.

Из только что сказанного непосредственно следует, что все двойные слои одинаковой равномерной плотности τ_{l}, которые опираются на один и тот же контур, имеют одинаковые потенциалы.

Замкнутая поверхность не имеет никакого пограничного контура. Поэтому и двойной равномерный замкнутый слой дает снаружи потенциал, равный нулю. Внутри же такой поверхности, где нормаль отрицательна, потенциал будет равен $-4\pi\tau_{\text{l}}$. Градиент такого потенциального поля был бы везде равен нулю, и только в самом слое он был бы бесконечен.

92. Прерывное поле. Мы видели выше, что в поле, где имеются источники с поверхностною плотностью σ, нормальные составляющие градиента поля делаются прерывными, так что

$$v_{n1}-v_{n2}=-\frac{d\varphi}{dn_1}+\frac{d\varphi}{dn_2}=4\pi\sigma.$$

Мы видели также, что такой перерыв происходит на границах поляризованных тел, для которых

$$\sigma=P_n.$$

Наконец, если в поле имеются двойные слои с поверхностною плотностью нормальных биполей $\tau_{\text{l}n}$, то сам потенциал делается прерывным, при чем

$$\varphi_1-\varphi_2=4\pi\tau_{\text{l}n}.$$

Можно доказать и обратную теорему: если в поле имеются поверхности, у которых потенциал φ или нормальная составляющая его градиента прерывны, то для расчетов мы можем предположить, что эти поверхности покрыты двойными или ординарными источниками с плотностями

$$\tau_{\text{l}n}=\frac{1}{4\pi}(\varphi_1-\varphi_2);\quad \sigma=\frac{1}{4\pi}(v_{n1}-v_{n2}).$$

Для того, чтобы доказать это, применим формулу Грина совершенно так же, как это мы делали раньше (см. стр. 81, **79**), только при интегрировании примем теперь во внимание прерывность поля.

Напомним читателю, что еще при применении теоремы Гаусса (см. стр. 71, **70**; рис. 66), интегрируя по поверхностям элементарных объемов *do внутри* поля, мы принимали, что сквозь любую границу двух соседних элементарных объемов потоки вектора $\mathbf{v}$ равны и противоположны, а потому в общей сумме по всем поверхностям они взаимно уничтожаются. Одни только *наружные* границы поля дают потоки, которые мы и обозначали интегралом с кружком

$$\oint \mathbf{v}_n d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot do.$$

Это, конечно, верно только для непрерывного поля. Если же во внутренних частях поля имеются поверхности, где поток прерывен, то тогда необходимо выделить эти поверхности из поля двумя бесконечно близко прилегающими к ним поверхностями. Эти последние делаются, таким образом, границами поля, и на них нужно будет распространить интегрирование по границам.

Точно также и при применении теоремы Грина (стр. 81, **79**) интеграл

$$\frac{1}{4\pi} \oint \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) dS$$

нужно будет распространить не только по бесконечно удаленной границе поля и не только на поверхность беспредельно уменьшающейся сферы, содержащей точку P, но также и на те границы, которые выделяют поверхности перерыва φ и $\frac{d\varphi}{dn}$ из поля.

Заменяя в этом интеграле

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla \frac{1}{r} = \nabla_p \frac{1}{r},$$

получаем для границы, прилегающей к одной — *положительной* — стороне перерыва

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn_1} + \varphi \nabla_p \frac{1}{r} \right) dS,$$

а для границы, прилегающей к другой — *отрицательной* — стороне перерыва

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{-dn_2} - \varphi_2 \nabla_p \frac{1}{r} \right) dS.$$

Сумма этих интегралов дает

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dn_1}-\frac{d\varphi}{dn_2}\right)dS+\frac{1}{4\pi}\int(\varphi_1-\varphi_2)\nabla_p\left(\frac{1}{r}\right)dS=$$

$$=\int\frac{\sigma}{r}dS+\int\eta_n d\omega.$$

Другими словами, поверхности перерыва эквивалентны источникам и двойным слоям; что и требовалось доказать.

Заметим в заключение, что когда поле ограничено какою-либо замкнутою поверхностью S, то мы можем эту поверхность считать за поверхность перерыва и притом так, чтобы снаружи у этой поверхности

$$\varphi=0,\quad \frac{d\varphi}{dn}=0.$$

Тогда все наружное поле будет равно нулю, и мы можем его не принимать во внимание при расчете. Действие же пограничной поверхности сведется у нас к интегралу

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}-\varphi\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right)dS.$$

Это означает, что мы можем действие всех наружных источников поля заменить действием фиктивных источников на пограничной поверхности, распределенных ординарным или двойным слоем с плотностями

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dn},\quad \eta=\frac{1}{4\pi}\varphi.$$

Следовательно, вместо наружных источников нам могут быть даны потенциалы и их градиенты на пограничной поверхности.

Написанную выше формулу для пограничных источников мы уже получили раньше (стр. 81, **79**).

93. Общий случай потенциального поля. Теперь мы можем подвести итог нашим исследованиям.

Пусть нам дано потенциальное поле, для которого

$$\operatorname{curl}\ \mathbf{v}=0,$$

$$\mathbf{v}=-\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho,$$

и предположим, что нам дано:

1) поле всех источников ρ в пределах поля вектора **v**,

2) потенциалы φ и их градиенты $\frac{d\varphi}{dn}$ на пограничной поверхности поля,

3) все биполи различных порядков,

4) поляризованные тела с поляризацией **P**,

5) прерывы потенциала и его градиента.

В таком случае для потенциала любой точки поля внутри ограничивающей поле поверхности мы будем иметь выражение

$$\varphi_0 = \int \frac{\varphi}{r}\,do - \oint \left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\right) dS + \sum p_n \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^k \partial z^m}\left(\frac{1}{r}\right) +$$
$$+ \int \left(\mathbf{P}\cdot\nabla_p \frac{1}{r}\right) do + \int \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi}\,d\omega + \int \frac{v_{n1} - v_{n2}}{4\pi}\,dS.$$

94. Заряженный шар. В различных отделах физики мы будем иметь достаточно случаев применения теории потенциального поля — в гидродинамике, теории тяготения, в электричестве и магнетизме. Тем не менее, полезно будет сейчас же разобрать несколько простейших примеров, которые нам пригодятся и впоследствии.

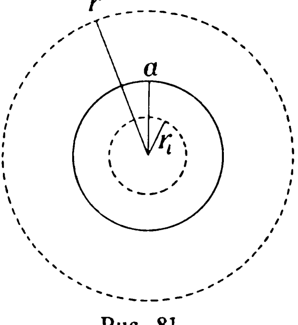


Рис. 81.

Представим себе шар радиусом a, наполненный источниками, плотность которых — какая-либо функция расстояния от центра шара (рис. 81). Положим

$$\rho = f(r)$$

и пусть

$$e = \int_0^a \rho\, do.$$

В таком простом случае нам нет надобности прибегать к потенциалам, а можно определить непосредственно поле вектора

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Действительно, наше поле симметрично вокруг центра шара, и вектор **v**, очевидно, направлен по радиусу. Поток этого вектора

сквозь какую-либо шаровую поверхность радиуса r и концентрическую с нашим шаром a будет $4\pi r^2 v_a$. По теореме Гаусса это должно равняться силе всех источников, находящихся внутри шара r. Отсюда ясно, что для всякого расстояния r_a, которое больше a, т.-е. для наружных точек поля, мы будем иметь:

$$4\pi r^2 v_a = 4\pi \int_0^a \rho\, do = 4\pi e,$$

и, следовательно,

$$v_a = \frac{e}{r^2}.$$

Это означает, что наружу шар действует так, как будто весь его заряд e был сосредоточен в центре.

Внутри шара a, т.-е. для $r_i < a$, мы будем иметь поток сквозь шаровую поверхность радиуса r_i:

$$4\pi r_i^2 v_i = 4\pi \int_0^{r_i} \rho\, do,$$

$$v_i = \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \rho do = \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} f(r)\, do,$$

и здесь поле будет зависеть от того, какова $f(r)$.

Если, например, ρ постоянно для всего шара, тогда

$$\int_0^{r_i} \rho\, do = \rho \frac{4}{3} \pi r_i^3,$$

$$v_i = \frac{4\pi\rho}{3} r_i.$$

Значит, напряжение, или градиент поля, внутри шара будет расти от центра к поверхности пропорционально радиусу r_i.

В центре шара $v = 0$.

На поверхности шара $r = a$ и

$$v_i = \frac{4\pi\rho}{3} a.$$

Тот же результат для поверхности шара мы получим, если будем итти снаружи, уменьшая радиус r_a до $r_a = a$. Действительно,

$$v_a = \frac{e}{r^2} = \frac{4\pi a^3 \rho}{3a^2} = \frac{4\pi\rho}{3} a.$$

Как видим, поле вектора $\mathbf{v}$ непрерывно.

По данному полю $\mathbf{v}$ мы можем определить и поле его потенциала по формуле

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0 \mathbf{v}_s \, d\mathbf{S}.$$

Для наружного поля, которое эквивалентно полю источника e, помещенного в центре, потенциал нам известен

$$\varphi = \frac{e}{r},$$

при чем φ_0 для бесконечно удаленных точек принято равным нулю,

На наружной поверхности шара a

$$\varphi_a = \frac{e}{a} = \frac{4\pi}{3} a^2 \rho.$$

Тот же потенциал должен быть взят и на внутренней поверхности шара, потому что потенциал в нашем поле, где нет двойных слоев, должен быть непрерывным.

Для поля внутри шара при определении потенциалов мы примем исходную точку на поверхности шара a и будем интегрировать по радиусу к центру, т.-е. по $-dr$

$$\varphi - \varphi_a = -\int_a^{r_i} \mathbf{v}_r \, dr = -\frac{4\pi}{3} \rho \int_a^r r_i \, dr = \frac{2\pi}{3} \rho \left[a^2 - r^2 \right],$$

а подставляя значение

$$\varphi_a = \frac{4\pi\rho}{3} a^2,$$

получаем

$$\varphi = 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

Наконец, потенциал в центре шара будет

$$\varphi = 2\pi\rho a^2.$$

Предлагаем читателю вычислить энергию наружного и внутреннего поля равномерно заряженного шара по значениям φ и ρ, с одной стороны, и по значениям $\mathbf{v}$ — с другой (стр. 83, **80**).

Энергия наружного поля равна

$$T_a = \frac{e^2}{2a}.$$

Энергия внутреннего поля равна

$$T_i = \frac{e^2}{10a}.$$

Наконец, энергия всего поля, вычисленная по φ и ρ, получается равною

$$T = \frac{3}{5}\frac{e^2}{a},$$

т.-е. равна сумме обеих энергий.

95. Поляризованный шар. Теперь предположим, что наш шар равномерно заполнен биполями с объемною плотностью $\mathbf{P}$, направленною параллельно оси X. Мы можем себе представить, что сначала в каждой точке нашего шара были и положительные, и отрицательные источники с плотностью $\pm\rho$; их действие сводилось к нулю. Затем все положительные источники (или заряды) сдвинулись относительно отрицательных вправо (рис. 82) на длину dl.

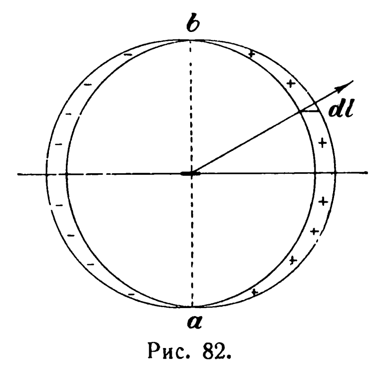


Рис. 82.

При этом в каждой единице объема образовался момент

$$\mathbf{P} = \rho\, d\mathbf{l}.$$

Несмотря на такой сдвиг, *внутри* шара в каждом элементе его объема все же имеются и положительные, и отрицательные источники в равном количестве, т.-е. внутренность шара осталась незаряженной. Но на поверхности шара у нас справа получился тонкий слой с объемною плотностью $+\rho$, а слева такой же

слой $-\rho$. Толщина этого слоя, если считать его по нормали шара, т.-е. по радиусу, будет выражаться формулою

$$dn = dl \cos(rX).$$

Поверхностная плотность слоя будет

$$\sigma = \rho\, dn = \rho\, dl \cos(rX) = P \cos(rP) = P_n;$$

как видим, поверхностная плотность σ равна нормальной составляющей поляризации.

Этот результат служит прекрасной иллюстрацией той теоремы, которую мы вывели для самого общего случая поляризованного тела (стр. 96, **88**).

Для вычисления поля поляризованного шара мы могли бы его заменить двумя полушаровыми слоями σ, но гораздо проще поступить следующим образом.

Рассмотрим опять наружное и внутреннее поле шара отдельно.

Наружное поле поляризованного шара или наших двух шаров, сдвинутых друг относительно друга на длину dl, будет, очевидно, эквивалентно полю диполя, помещенного в центре, коего момент

$$\mathbf{p} = e\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi a^3}{3} \rho\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi a^3}{3} \mathbf{P}.$$

Поле биполя мы уже изучали (стр. 90, **85**); для него, если принять опять φ_0 для бесконечно удаленных точек равным нулю, мы получим

$$\varphi_a = \frac{p \cos \alpha}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r^2} P \cos \alpha,$$

а для составляющих вектора $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi$ по радиусу и по касательной к окружности радиуса r в плоскости (pr)

$$v_r = 2p \frac{\cos \alpha}{r^3} = 2 \frac{4\pi a^3}{3} \frac{\cos \alpha}{r^3} P,$$

$$v_t = p \frac{\sin \alpha}{r^3} = \frac{4\pi a^3}{3} \frac{\sin \alpha}{r^3} P.$$

Для вычисления *внутреннего* поля мы прибегаем к общей формуле для поляризованных тел (стр. 96, **88**):

$$\varphi_i = \int \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_p \frac{1}{r} \right) do.$$

Вектор $\mathbf{P}$ у нас для всего поля один и тот же, его можно вынести за знак интеграла.

Вектор $\nabla_p \frac{1}{r}$ есть градиент потенциала $\frac{1}{r}$, т.-е. потенциала единицы объема поля с плотностью источников, равною единице. В предыдущем параграфе мы уже вычислили потенциал внутри шара, заполненного зарядами плотностью $+\rho$, а именно

$$\varphi_+ = 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

Положив здесь $\rho = 1$ и взяв производную по $-r$, получим

$$\int \left(\nabla \frac{1}{r} \right) do = -\frac{d\varphi_+}{dr} = \frac{4\pi}{3} r;$$

так как под интегралом оба вектора $\mathbf{P}$ и ∇ множатся друг на друга скаларно, т.-е. еще на $\cos(Pr)$, то в конце концов получаем:

$$\varphi_i = \frac{4\pi}{3} (\mathbf{Pr}) = \frac{4\pi}{3} Pr \cos\alpha = \frac{4\pi}{3} Px.$$

Легко убедиться в том, что при $r = a$ потенциалы φ_a и φ одинаковы, т.-е. что поле φ непрерывно, как это и должно быть, потому что в нем нет двойных слоев.

По потенциалу φ_i мы видим, что поле его градиента направлено по оси X и вектор

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi_i = -\frac{d\varphi_i}{dx} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}.$$

Итак, внутри поляризованного шара поле однородно, т.-е. везде одинаково, и направлено параллельно *отрицательной* оси X, т.-е. против направления поляризации.

Это последнее обстоятельство, впрочем, могло быть отчасти предугадано, потому что на рис. 82 (стр. 106) прямо видно, что

при сдвиге положительного шара вправо, справа выступают положительные заряды, а слева — отрицательные; поэтому поле внутри шара должно быть направлено справа налево, т.-е. по $-X$.

Вычислим еще **v** для *поверхности* шара.

По формулам для *наружного* поля при $r = a$ имеем

$$v_{r1} = 2\frac{4\pi}{3} P \cos\alpha,$$

$$v_{t1} = \frac{4\pi}{3} P \sin\alpha.$$

По формуле для *внутреннего* поля

$$v_{r2} = -\frac{4\pi}{3} P \cos\alpha,$$

$$v_{t2} = \frac{4\pi}{3} P \sin\alpha.$$

Как видим, *тангенциальная* составляющая вектора **v** непрерывна,

$$v_{t1} = v_{t2}.$$

Между тем разность *нормальных* составляющих равна

$$v_{r1} - v_{r2} = 4\pi P \cos\alpha = 4\pi \mathbf{P}_n = 4\pi\sigma,$$

т.-е. перерыв в нормальной слагающей вектора **v** равен 4π, умноженному на поверхностную плотность σ.

Таким образом, на частном случае поляризованного шара мы убедились в справедливости тех общих теорем, которые мы вывели в § 81 и 84.

96. Пограничные условия. Рассмотренные нами случаи полей, в которых даны все источники или даны перерывы потенциала φ и его градиента, что тоже эквивалентно источникам, представляют собою сравнительно простые задачи, и решаются они общей формулой, данной нами на стр. 100, **92**. Но бывают такие случаи, когда не все источники известны, а только часть их, зато известен потенциал или его градиент на некоторых поверхностях поля. Большею частью эти поверхности служат границами поля, отчего эти данные и носят название *пограничных условий*. Найти решение,

которое удовлетворяло бы, с одной стороны, уравнению Лапласа-Пуассона, а с другой — данным пограничным условиям, обыкновенно представляет значительные затруднения, и успех решения зависит от догадливости и опытности решающего. Дать общую формулу решения, которая была бы применима во всех случаях, оказывается невозможным. Тем не менее, можно указать общие методы, которые обыкновенно применяются в подобных случаях.

Значительным облегчением для решения является то обстоятельство, что уравнение Лапласа-Пуассона *линейное*, т.-е. *первой* степени, и что, благодаря этому, можно расчленить всю задачу на отдельные более простые задачи, а потом взять их сумму, которая тоже будет удовлетворять уравнению Лапласа-Пуассона, Так, например, можно сперва определить потенциалы всех источников, не обращая внимания на пограничные условия, затем постараться удовлетворить пограничным условиям, считая, что в поле нет источников. Если каждое из этих решений удовлетворяет уравнению Лапласа-Пуассона, то сумма этих решений тоже будет удовлетворять ему, но кроме того оно будет удовлетворять и пограничным условиям.

Конечно, при таком расчленении задачи не надо забывать о том, что отдельные частные задачи не всегда бывают совершенно независимы друг от друга. Так, например, если найдены потенциалы источников, и эти потенциалы на границах поля *не* равны нулю, то их нужно принять во внимание и *вычесть* из данных нам пограничных условий для того, чтобы после суммирования всех решений пограничные условия были соблюдены в точности.

Остается еще указать, как решают ту часть задачи, где даны пограничные условия, но не даны источники. Искомые источники могут быть или в виде отдельных полюсов, или в виде биполей различного порядка. Вообще говоря, эта задача неопределенная и допускает множество решений. Но если известно, что внутри данной поверхности нет полюсов, а только биполи, то задача упрощается, и при некоторой опытности можно догадаться, как приблизительно расположены искомые биполи. Догадку можно будет проверить вычислением и, если она не совсем удовлетворяет условиям задачи, соответственным образом исправить, опять проверить и т. д. до тех пор, пока решение не получится с желаемою точностью.

В тех случаях, когда пограничная поверхность дана сравнительно простой формы (например шар), выбирают такую систему коорди-

нат, в которой эта поверхность служит координатною поверхностью (шар в сферических координатах). Тогда для нее одна из координат (r) делается постоянною, и пограничное условие для потенциала будет зависеть только от *двух* координат (от широты и долготы). Для таких случаев в математике имеется целый ряд специальных функций, как, например, Лежандра, Лапласа, Бесселя и т. п., которые позволяют любую данную нам пограничную функцию представить в виде суммы бесконечного ряда слагаемых, из которых каждый удовлетворяет уравнению Лапласа в соответственных координатах. Каждый член такого ряда можно толковать как потенциал биполя известного порядка, и это дает возможность определить искомое поле по данным на поверхности.

Повторяем еще раз, что одни условия на поверхности еще не позволяют определить поля. Мы уже видели, что наружное поле заряженного шара эквивалентно полю одного полюса, наружное поле поляризованного шара эквивалентно биполю и т. д. Но если кроме условий на поверхности еще дано, что внутри этой поверхности $\rho = 0$, т.-е. что внутри должно быть удовлетворено уравнение Лапласа (не Пуассона), тогда можно решить задачу однозначно.

Так, например, если потенциал φ_0 дан для шаровой поверхности радиуса R, то какова бы ни была функция φ_0 (функция широты α и долготы β) — всегда можно разложить эту функцию в бесконечный ряд (по шаровым функциям), и каждый член этого ряда будет представлять собою потенциал биполя известного порядка, помещенного в центре шара радиуса R. Задача нахождения поля таким образом сведена к задаче разложения функций в ряды.

В некоторых случаях бывает выгодно расчленить не только потенциал, но и само поле на отдельные участки различного характера. Мы уже применяли этот метод для поляризованного шара. При этом наружное поле мы вычисляли так, как будто в центре был помещен биполь, но для внутренних точек шара поле этого биполя нам уже не подходило по условиям задачи: внутреннее поле оказалось однородным. При делении поля на участки необходимо бывает удовлетворить и условиям на поверхности раздела полей.

С подобными случаями мы будем часто встречаться в различных отделах физики.

Сказанного мы считаем достаточным для того, чтобы дать читателю некоторое представление о тех методах, которые применяются

при решении задач, касающихся потенциального поля. Останавливаться на этом более подробно мы здесь не имеем возможности и отсылаем интересующихся к специальным отделам математики, где трактуются линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, к которым относится и уравнение Лапласа-Пуассона. Это один из наиболее важных для теоретической физики отделов математики.

97. Черчение поля по способу Максвелла. Очень часто, в особенности в технических вопросах, расчеты полей заменяют графическими построениями. Так, например, если мы имеем два чертежа, изображающие две формы какого-нибудь известного нам физического поля, то мы можем сложить оба поля и получить результирующее поле графическим путем. Удобнее всего это сделать, если одно из полей начерчено на прозрачной восковой бумаге или на полотняной кальке.

Налагая прозрачный чертеж на непрозрачный, мы получим, во-первых, целую систему точек пересечения *эквипотенциальных линий* обоих полей. Если в какой-либо точке пересекаются эквипотенциальная линия φ_1 первого поля и эквипотенциальная линия φ_2 второго поля, то в этой точке результирующее поле будет иметь потенциал $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. При некотором внимании, легко на этом основании провести линии одинакового потенциала результирующего поля φ

Точно также, налагая один чертеж на другой, мы увидим, что *линии градиентов* обоих полей образовали целую систему четыреугольников (рис. 83). Диагонали этих четыреугольников будут линии градиента результирующего поля. Какая именно из двух диагоналей четыреугольников служит направлением результирующего (суммарного) поля, это легко сообразить по направлению линий составляющих полей (см. рис. 83). Если одна из диагоналей дает сумму двух полей, то другая дает их разность.

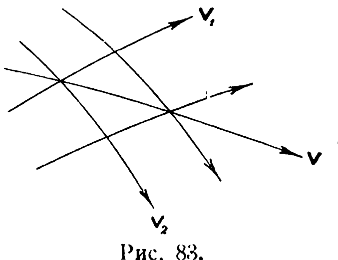


Рис. 83.

При таком черчении не нужно упускать из виду, что наш чертеж представляет собою лишь пересечение пространственного поля плоскостью чертежа, а потому надо выбирать наиболее типичные сечения.

Заметим однако, что указанный выше способ сложения двух полей проведением диагоналей дает верный результат только

при условии, что густота линий в каждом из слагаемых полей пропорциональна градиенту этого поля (стр. 63, **64**), т.-е. что промежутки между линиями соответствуют одинаковым потокам (стр. 73, **72**).

Для примера составим поле двойного полюса из полей отдельных полюсов.

Эквипотенциальные поверхности полюса $+e$ будут шары, которые на плоскости чертежа, проходящей через центр шара, дадут систему кругов. Если в формуле

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

или

$$r = \frac{e}{\varphi}$$

давать φ значения 0, 1, 2, 3 и т. д., то получим радиусы r эквипотенциальных поверхностей с одинаковою разностью потенциалов двух соседних поверхностей (рис. 84), как это сказано на стр. 59, **61**.

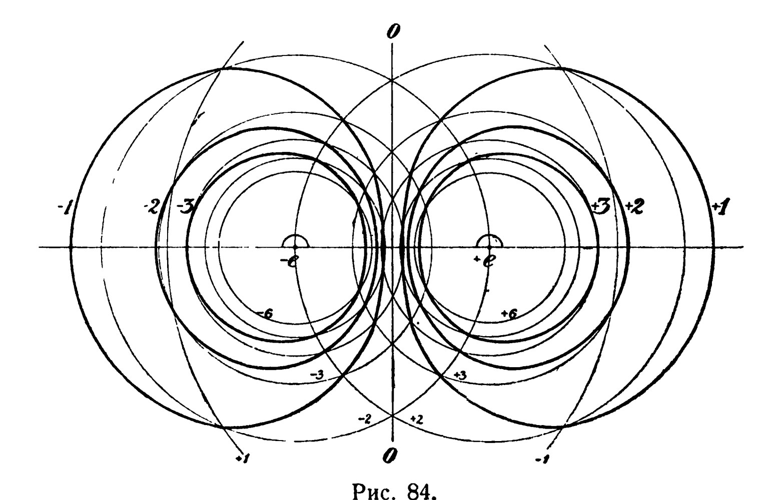


Рис. 84.

Сами окружности будут, конечно, не на одинаковом расстоянии друг от друга.

Такой же чертеж мы получим и для полюса $-e$.

Налагая один чертеж на другой и притом так, чтобы полюса не совпадали, а были друг от друга на расстоянии l, и проводя, как сказано выше, эквипотенциальные поверхности суммарного поля (рис. 84), мы получим поле двойного полюса.

В этом поле опять смежные эквипотенциальные поверхности будут разниться в потенциалах на единицу.

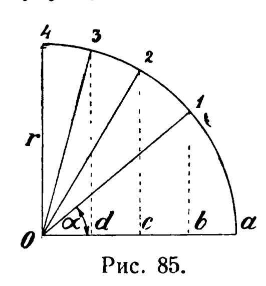


Рис. 85.

Для того, чтобы составить чертеж линий сил, которые для полюса e будут все радикальны, нам надо разделить поле на трубки равного потока (стр. 73, **72**). Мы сделаем это так.

Проведем в поле шар радиуса r с центром в полюсе e. В этом шаре выберем ось Oa (рис. 85) и опишем у этой оси конус, с образующими под углом α к оси. Тогда наш конус вырежет на шаре сегмент, поверхность которого будет равна $2\pi r^2(1-\cos\alpha)$, а поток вектора $\frac{e}{r^2}$ сквозь эту поверхность будет

$$N = 2\pi e(1-\cos\alpha).$$

Эга формула показывает нам, что конусы одинаковых потоков соответствуют одинаковым отрезкам ab, bc и т. д. оси.

Основываясь на этом, мы можем составить чертеж векторных линий двойного полюса следующим образом.

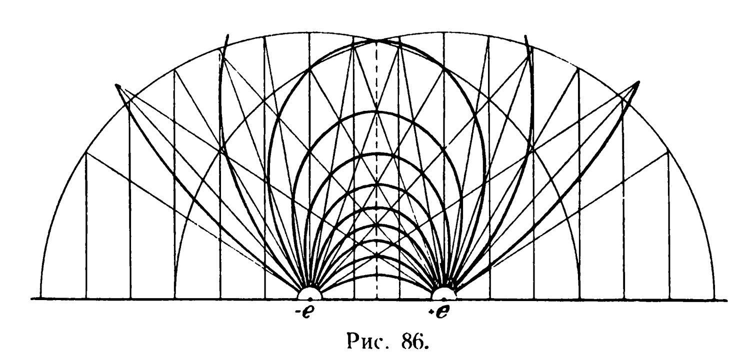


Рис. 86.

Возьмем расстояние между полюсами равным, например, трем делениям (рис. 86), а радиус шара вокруг каждого полюса возьмем равным шести делениям. Каждое из этих делений будет соответствовать конусу одинакового потока. Восставив из точек делений перпендикуляры до пересечения с шаром (на нашем чертеже с окружностью), проводим границы этих конусов, которые и будут нам служить векторными линиями.

Обе системы полученных таким путем векторных линий из источников $+e$ и $-e$, при сложении по правилу параллелограмма, дадут нам искомое поле двойного полюса.

Получив таким образом линии градиента результирующего поля, полезно, конечно, проверить, действительно ли эти результирующие линии градиента перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям результирующего поля.

Ввиду тех затруднений, которые встречаются при решении уравнения Лапласа-Пуассона с добавочными пограничными условиями, черчение полей по способу Максвелла для различных частных случаев может оказать громадную услугу. Чем большее число частных случаев поля нам известно, тем легче нам ориентироваться в новом еще неизвестном нам поле.

Кроме графического способа получения поля, имеется еще целый ряд физических способов. Так, например, примешивая к струйкам воды какую-либо краску, можно сделать их видимыми и сфотографировать при самых разнообразных пограничных условиях. Можно сделать видимыми также линии сил электрического и магнитного поля и т. д.

Каждое из подобных наблюдений дает нам сведения не только о свойстве того физического поля, которое мы непосредственно наблюдаем, но оно может иногда служить для предсказания явлений вообще в потенциальном поле, независимо от его физической природы.

3. ВИХРЕВОЕ ПОЛЕ.

98. Теорема Стокса. При обсуждении свойств векторного поля $\mathbf{v}$ мы уже указали, что для того, чтобы оно имело потенциал, необходимо, чтобы интеграл вектора $\mathbf{v}$, взятый по любому замкнутому пути, был равен нулю, или чтобы в любой точке поля (стр. 67, **66**)

$$\text{curl}\,\mathbf{v} = 0.$$

Мы перейдем теперь к рассмотрению полей, в которых это условие *не* соблюдено, но предварительно докажем одну очень важную теорему, открытую Стоксом.

Возьмем в плоскости YZ (рис. 87) у точки O элементарную площадку $dydz$ и проинтегрируем по контуру этой площадки $O\,123\,O$ величину скалярного произведения $v_s\,d\mathrm{s}$.

Для пути $(O,1)$ мы должны взять $v_y\,dy$.

На пути $(1,2)$ нам нужно взять $v_z^1\,dz$. Но значение v_z^1 в точке (1) может отличаться от его значения в точке (O), и, если изменение v_z на *единицу* длины dy равно $\frac{\partial v_z}{\partial y}$ (это есть *частная* производная от v_z по y, потому что предполагаем, что при этом z и x не меняются), то на *всю* длину dy мы получаем изменение $\frac{\partial v_z}{\partial y}\,dy$. Значит, на пути $(1,2)$ нам нужно вместо v_z взять вектор

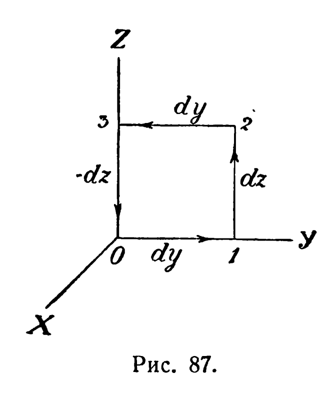


Рис. 87.

$$v_z^1 = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,dy.$$

Получим

$$\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,dy\right)dz.$$

Аналогично с этим, для пути $(2,3)$, отстоящего от начала на расстоянии dz, получим

$$-\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\,dz\right)dy.$$

Знак минус — dy у нас получился потому, что мы шли от (2) к (3), т.-е. туда, куда y уменьшается.

Наконец, для последнего участка $(3,O)$ по пути dz получаем

$$-v_z\,dz.$$

Складывая все эти четыре выражения, имеем интеграл по замкнутому контуру

$$\oint_{yz} (\mathbf{v}_s\,d\mathbf{s}) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

Если мы обозначим величину, стоящую в скобках, через w_x, тогда справа получим поток некоторого вектора $\mathbf{w}$ сквозь площадку $dy\,dz$.

Если взять в плоскости YZ площадку $d\mathbf{S}$ не четыреугольную, а какой-либо другой формы, то для вычисления интеграла по замкнутому пути мы можем разделить эту площадку на элементарные площадки $dydz$ (рис. 88) и к каждой из них применить нашу формулу ин-

тегрирования, а потом все эти формулы сложить. При этом каждая граница двух соседних элементарных площадок пройдется у нас два раза и притом по противоположным направлениям; и если v_y и v_z везде *непрерывны*, то в общей сумме эти интегралы взаимно уничтожатся, и останутся только интегралы, относящиеся к *наружному* контуру всей площадки. Значит, для нашей площадки любой формы мы тоже можем написать

$$\oint_{yz} (\mathbf{v}_s d\mathbf{s}) = \int \mathbf{w}_x d\mathbf{S}.$$

Z dS O У

Рис. 88.

Здесь левый интеграл берется по замкнутому контуру, а правый — по площади этого контура.

Конечно, вектор $\mathbf{w}_x$ для различных точек плоскости YZ может быть различным, точно так же, как и вектор $\mathbf{v}_s$.

Совершенно подобные же выражения мы получим при интегрировании в плоскостях ZX и XY, причем вектор $\mathbf{w}$ будет иметь составляющие:

$$w_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$w_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$w_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

а это, как мы знаем, обозначается короче

$$\mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}.$$

Вектор $\mathbf{w}$ можно для краткости называть *вихрем* поля вектора $\mathbf{v}$; однако точнее следовало бы называть его *плотностью* вихрей, потому что вектор $\mathbf{w}$, как увидим ниже, относится к единице объема и он имеет некоторую аналогию с плотностью источников ρ.

Если элементарная площадка $d\mathbf{S}$ не лежит в плоскости координат, тогда интегрирование по ее контуру даст нам

$$\oint (\mathbf{v}_s d\mathbf{s}) = \mathbf{w}_n d\mathbf{S},$$

где $\mathbf{w}_n$ — нормальная к $d\mathbf{S}$ составляющая вектора $\mathbf{w}$, при чем нормаль к площадке $d\mathbf{S}$ и направление контура $\mathbf{s}$ должны быть взяты по право-винтовой системе, как это мы условливались (стр. 19, 22).

Теперь представим себе в поле какой-либо замкнутый контур любой формы и величины; этот контур может и не лежать в одной плоскости. Проведем через этот контур какую-либо поверхность, для которой этот контур служил бы границею; поверхность эта может быть тоже любой формы. Разделим эту поверхность на элементарные площадки $d\mathbf{S}$, проинтегрируем по их контурам выражение $\mathbf{v}_s d\mathbf{S}$ и сложим все эти интегралы вместе.

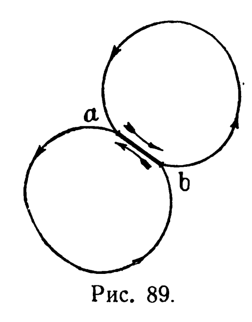


Рис. 89.

При интегрировании по контурам элементарных площадок все внутренние контуры *ab* (рис. 89) пройдутся два раза и притом в противоположных направлениях. Если у этих пограничных контуров значения $\mathbf{v}_s$ для обеих площадок одинаковы, т.-е если вектор $\mathbf{v}$ при переходе через контур *непрерывен*, то произведения $\mathbf{v}_s d\mathbf{s}$ для обеих направлений *ab* и *ba* будут равны и противоположны, а потому они к общей сумме интегралов ничего не прибавят. Остается лишь интеграл, распространенный по всему *наружному* контуру поверхности.

С другой стороны, суммируя правые части $\mathbf{w}_n d\mathbf{S}$, мы получим поток вектора $\mathbf{w}$ сквозь всю поверхность, для которой этот контур служит границей.

Итак,

$$\oint (\mathbf{v}_s\, d\mathbf{s}) = \int (\mathbf{w}_n\, d\mathbf{S})$$

или можем написать:

$$\oint (\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{s}) = \int (\operatorname{curl} \mathbf{v} \,.\, d\mathbf{S}).$$

Это выражение называется теоремой Стокса. По этой теореме мы можем интеграл вектора $\mathbf{v}$, взятый по любому *замкнутому* пути в векторном поле, преобразовать в интеграл, взятый по любой поверхности, для которой этот контур служит границей; притом под интегралом, вместо вектора $\mathbf{v}$, нужно поставить curl $\mathbf{v}$.

Легко видеть, что в прямоугольных, прямолинейных координатах теорема Стокса напишется так:

$$\oint (v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz) = \int (w_x\, dydz + w_y\, dzdx + w_z\, dxdy).$$

Для тех полей, где $\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0$, очевидно и

$$\oint (\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{s}) = 0,$$

и следовательно, значение интеграла по пути между двумя точками (O) и (1)

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int_O^1 (\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{s})$$

не зависит от пути интегрирования; такие векторные поля имеют потенциал.

99. Циркуляция. Многосвязное пространство. Мы знаем (стр. 66, **66**), что в потенциальных векторных полях интеграл, взятый по *замкнутому* пути, или, как его называют, *циркуляция* равна нулю

$$\oint (\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{s}) = 0.$$

Отсюда мы вывели, что тот же интеграл, примененный к бесконечно малому контуру, т.-е. $\operatorname{curl} \mathbf{v}$, тоже равен нулю

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0.$$

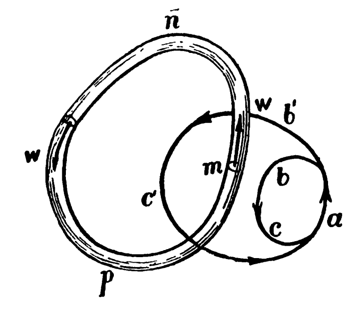


Рис. 90.

Тем не менее оба эти выражения не всегда эквивалентны. Бывают поля, во всех точках которых второе условие соблюдено, между тем как циркуляция не равна нулю. Эквивалентность обоих выражений остается верною только в *односвязных* пространствах, и сейчас мы поясним, что это значит.

Представим себе некоторый кольцевой объем (рис. 90), который не принадлежит к нашему полю и который по каким-либо причинам нами выделен из поля, например, потому что внутри этого объема имеются вихри, а в остальном поле их нет.

Мы знаем, что по теореме Стокса

$$\oint (\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s}) = \int (\mathrm{curl}\, \mathbf{v} \, . \, d\mathbf{S}).$$

Следовательно, интегрируя по какому-либо замкнутому контуру в поле, мы только тогда получим нуль, если сквозь площадь, ограниченную этим контуром, не проходит ни одной вихревой линии. Это действительно имеет место для контура abc (рис. 90). Но для контура $ab'c'$ этого уже не будет. Действительно, хотя контур $ab'c'$ тоже весь проходит в границах нашего поля, где curl $\mathbf{v} = 0$, но он отличается от контура abc тем, что охватывает вихревое кольцо *mnp*. А потому, когда мы будем проводить через контур $ab'c'$ поверхность, мы непременно пересечем этою поверхностью вихревой объем *mnp*. В результате циркуляция уже не будет равна нулю, а по теореме Стокса будет равна потоку вихря $\mathbf{w} = \mathrm{curl}\, \mathbf{v}$ сквозь эту поверхность. Пусть этот поток будет равен c (circulation). Значит, обойдя контур $ab'c'$, мы получим

$$\oint (\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s}) = c.$$

Обойдя этот контур два раза, получим $2c$, и вообще, обойдя его n раз, получим nc.

Интеграл от $(\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s})$ между какими-либо двумя точками в поле, где curl $\mathbf{v} = 0$, должен быть равен разности потенциалов этих точек $\varphi_1 - \varphi_0$, независимо от пути интегрирования; между тем, идя по ab', мы получаем

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int_1^2 (\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s}),$$

а идя по пути $ab'c'ab'$ и обойдя контур n раз, получаем

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int_1^2 (\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s}) + nc.$$

Таким образом потенциал одной и той же точки b', да и вообще любой точки поля, получает несколько значений, т.-е. делается *многозначным*.

Для того, чтобы устранить происходящую от этого неопределенность, условливаются определять потенциал поля так, чтобы путь

интегрирования *не обходил* выделенного из поля кольца *mnp*. Для этого затягивают кольцо *mnp* какою-либо поверхностью или перегородкою, все равно какой формы, и уславливаются при интегрировании по пути не пересекать этой перегородки. Перегородка нисколько не изменяет нашего поля, в котором везде, как и прежде, остается curl $\mathbf{v} = 0$; однако благодаря этой перегородке, потенциал везде делается однозначным, и интеграл $(\mathbf{v} \, . \, d\mathbf{s})$ по замкнутому контуру будет всегда равен нулю.

Из сказанного мы видим, что выделение вихревого объема из нашего поля хотя и обратило это поле в потенциальное, но потенциал оказался *многозначным*. Для того, чтобы потенциальное поле сделать *однозначным*, мы, кроме выделения вихревого объема, должны еще затянуть вихревое кольцо перегородкой и условиться не пересекать ее при интегрировании по пути, т.-е. при определении потенциалов различных точек поля.

Пространство, которое у нас получилось при выделении из него вихревого кольца *mnp*, называется *двусвязным*. — В нем можно провести *два* рода замкнутых контуров: *один род* контуров, как например *abc*, мы можем свободно стянуть в бесконечно малый контур (при этом циркуляция обращается в curl), не затрагивая вихревого кольца; *другой* же род контуров, как например $ab'c'$, нельзя стянуть в бесконечно малый контур, не пересекая вихря, т.-е. не выходя контуром из нашего поля (объем вихря выделен нами и к нашему полю не относится).

Мы показали, как двусвязное пространство можно превратить в односвязное пространство посредством перегородки; и если условиться не пересекать этой перегородки, то любой конечный контур, проведенный в нашем поле, можно стянуть — оставаясь все время в границах поля — в бесконечно малый контур.

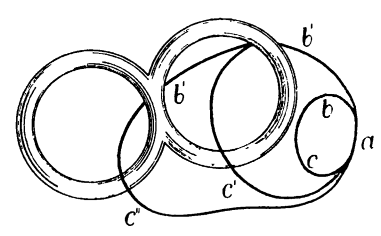


Рис. 91.

На рисунке 91 мы имеем выделенный объем в виде двух связанных колец (нечто вроде очков). Выделение подобного объема делает пространство трехсвязным; в нем можно провести три рода замкнутых контуров: *abc*, $ab'c'$, $ab''c''$. Однако такое пространство можно превратить в двусвязное при помощи одной перегородки, и в односвязное — при помощи двух перегородок.

Вообще, n-связное пространство мы всегда можем обратить в односвязное, с однозначным потенциальным полем, при помощи n условных перегородок.

100. Вихри в жидкости. Мы уже неоднократно иллюстрировали поле вектора $\mathbf{v}$ при помощи поля скоростей текущей жидкости, причем под $\mathbf{v}$ мы подразумевали *поступательную* скорость отдельных частиц потока жидкости. Но частица жидкости не представляет собою математической точки, а есть некоторый элементарный объем жидкости, и скорость $\mathbf{v}$ есть некоторая средняя *поступательная* скорость всех молекул жидкости, находящихся в этом объеме. Однако, кроме поступательной скорости, элементарный объем жидкости может иметь и некоторую *вращательную* скорость $\mathbf{u}$. Мы примем величину элементарного объема настолько малою, что для всех его точек можно положить одну общую поступательную скорость $\mathbf{v}$ и одну общую вращательную скорость $\mathbf{u}$. Значит, мы приписываем элементарному объему жидкости свойства твердого тела, а для твердого тела мы уже вывели (стр. 51, **51**) соотношение:

$$\oint (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = \int (2\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}).$$

Сравнивая это с теоремой Стокса, мы видим, что

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 2\mathbf{u},$$

т.-е. что вихрь вектора поступательной скорости частиц жидкости равен удвоенной их вращательной скорости.

Однако элементы объема жидкости на самом деле не представляют собою твердых тел, потому что они, кроме движения поступательного и вращательного, могут еще изменять свою форму. Тем не менее, вышенаписанное соотношение сохраняет свою силу, как это мы докажем ниже в теории тензоров.

101. Вихревые линии и трубки. Подобно тому как мы изображали поле вектора $\mathbf{v}$ системою векторных линий, точно так же и поле вихрей можно изобразить системою векторных линий $\mathbf{w}$, которые мы будем называть линиями вихрей или *вихревыми линиями*.

Так как

$$\mathbf{w} = \operatorname{curl} \mathbf{v},$$

то (стр. 59, **53**)

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{v} = 0.$$

Другими словами, в пределах поля у вихревых линий нет источников; они всегда замкнуты в поле или опираются на границы и разрывы рассматриваемого поля.

Но в чисто вихревом поле и вектор **v** тоже без источников, и векторные линии поля **v** поэтому тоже замкнуты. Легко видеть, что обе системы замкнутых линий векторов **v** и **w** охватывают друг друга, как кольца или как цепные звенья (рис. 92).

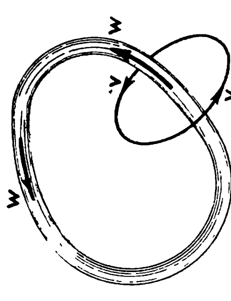
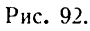



Рис. 92.

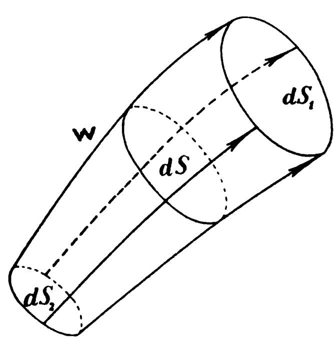


Рис. 93.

Далее, если взять в поле какую-либо площадку $d\mathbf{S}$ нормально к осям вихрей **w** и от контура этой площадки провести вихревые линии (рис. 93), то получим вихревую трубку. Так как у вектора **w** нигде нет источников, то их не будет и внутри этой вихревой трубки, а в таком случае совершенно так же, как это мы вывели (стр. 23, **72**) для трубки вектора **v**, мы можем и для вихревых трубок написать:

$$\int (\mathbf{w} \cdot d\mathbf{S}) = \text{Const.} = \mathbf{J}.$$

Величину **J** мы будем называть *силой* данной вихревой трубки; величина **w** есть *плотность* вихрей или вихрь, приходящийся на *единицу* площади сечения трубки.

Из постоянства потока опять заключаем (ср. стр. 72, **23**), что там, где трубка шире, плотность вихрей слаба, а там, где трубка уже, их плотность, т.-е. вращение жидкости, сильнее.

102. По вихрям определить поле. Вектор-потенциал. Если нам дано поле вектора **v**, то мы легко можем определить его вихри: для этого стоит только составить выражения $\text{curl}\,\mathbf{v} = \mathbf{w}$ для любой точки поля, и там, где этот вектор не равен нулю, имеется вихрь;

так, например, в поле скоростей жидкости $\mathbf{v}$ мы таким образом находим элементы жидкости, обладающие вращением.

Но пусть нам дана обратная задача. Положим, что дано поле вихрей, т.-е. дана плотность их $\mathbf{w}$ для всех точек пространства, и требуется определить поле вектора $\mathbf{v}$, т.-е. требуется решить уравнение

$$\text{curl}\,\mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

Впрочем, имея в виду применения этого уравнения к электромагнитным явлениям, а также, чтобы сохранить аналогию с потенциальным полем (стр. 77, **75**), где мы писали

$$\text{div}\,\mathbf{v} = 4\pi\rho,$$

мы и здесь введем множитель 4π и напишем

$$\text{curl}\,\mathbf{v} = 4\pi\,\mathbf{w}.$$

Положим, кроме того, что поле $\mathbf{v}$ не имеет источников, т.-е.

$$\text{div}\,\mathbf{v} = 0.$$

Что касается до поля вихрей $\mathbf{w}$, то оно не может иметь источников, так как мы видели выше, что (стр. 122, **101**)

$$\text{div}\,\mathbf{w} = 0.$$

Для решения поставленной выше задачи введем некоторый вспомогательный вектор $\mathbf{A}$, при чем положим

$$\mathbf{v} = \text{curl}\,\mathbf{A}.$$

Однако, одним этим уравнением вектор $\mathbf{A}$ не достаточно определен, потому что к нему можно было бы прибавить *любой* потенциальный вектор $\mathbf{B}$, для которого

$$\text{curl}\,\mathbf{B} = 0,$$

и эта сумма тоже удовлетворяла бы данному нам уравнению

$$\mathbf{v} = \text{curl}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}).$$

Во избежание такой неопределенности, наложим на вектор **A** еще одно условие, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Подставляя $\mathbf{v} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$ в наше уравнение, имеем

$$\operatorname{curl} . \operatorname{curl} \mathbf{A} = 4\pi \mathbf{w}.$$

Но на основании правила стр. 56, **58**

$$\operatorname{curl} . \operatorname{curl} \mathbf{A} = \nabla . \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

а принимая во внимание, что мы положили $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{w}$$

или, выписывая подробно все три уравнения в декартовых координатах,

$$\nabla^2 A_x = -4\pi w_x, \quad \nabla^2 A_y = -4\pi w_y, \quad \nabla^2 A_z = -4\pi w_z.$$

Сравнивая это с формулой Лапласа-Пуассона для потенциального поля (стр. 78, **76**)

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho,$$

мы можем сказать, что составляющие вектора **A** по осям координат связаны с составляющими плотности вихря **w** поля по тем же осям координат таким же соотношением, какими, в случае отсутствия вихрей, связан потенциал поля φ с плотностью источников ρ.

Вектор **A** называется *вектор-потенциалом* поля вихрей **w**. Он вполне аналогичен скалярному потенциалу φ поля источников ρ.

Основываясь на этой аналогии, полезно провести параллель между вихревым полем и потенциальным.

Когда у нас было дано поле источников ρ так, что для вектора **v** мы имели

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 4\pi \rho,$$

мы вводили вспомогательную функцию — потенциал φ, положив

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Это мы имели право сделать, потому что в нашем поле не предполагалось вихрей и

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0.$$

Для вспомогательной функции φ мы на основании вышеприведенных уравнений получали уравнение Лапласа-Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho.$$

Решение этого уравнения для скаларного потенциала φ имело вид

$$\varphi = \int \frac{\rho \, do}{r}.$$

Наконец, по найденному потенциалу φ определялось поле искомого вектора $\mathbf{v}$ по уравнению

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Точно так же и теперь, когда нам дано поле вихрей $\mathbf{w}$, и для искомого вектора $\mathbf{v}$ имеются уравнения

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 4\pi \mathbf{w}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

мы вводим вспомогательную функцию — вектор-потенциал $\mathbf{A}$, полагая

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl} \mathbf{A} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Для вектор-потенциала $\mathbf{A}$ получаем векторное уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{w},$$

которое состоит из трех скаларных уравнений Лапласа-Пуассона отдельно для осей X, Y и Z.

Решение этих уравнений будет иметь вид

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{w} \cdot do}{r}$$

или, подробнее,

$$A_x = \int \frac{w_x \, do}{r}, \qquad A_y = \int \frac{w_y \, do}{r}, \qquad A_z = \int \frac{w_z \, do}{r}.$$

Наконец, по найденным таким образом вектор-потенциалам мы определяем искомое поле по уравнению

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl} \mathbf{A}.$$

В заключение этого параграфа нам необходимо еще удостовериться, что действительно $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Из уравнения для вектор-потенциала имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{w}}{r}\right) do = \int \mathbf{w} \cdot \nabla \frac{1}{r}\, do + \int \frac{1}{r} \nabla \mathbf{w} \cdot do.$$

Но первый интеграл справа представляет собою поляризацию поля (стр. 96, **88**) и может быть преобразован в поток вектора $\mathbf{w}$ сквозь бесконечно удаленную поверхность; этот поток, как мы уже неоднократно доказывали, равен нулю. Второй интеграл справа вследствие того, что $\nabla \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ тоже равен нулю. Таким образом мы убеждаемся, что найденный нами вектор $\mathbf{A}$ удовлетворяет наложенному на него условию.

103. Энергия вихревого поля. Обыкновенно энергия единицы объема векторного поля $\mathbf{v}$ выражается формулой (стр. 84, **80**)

$$W = \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi}.$$

Приняв во внимание, что в нашем случае

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl} \mathbf{A} \quad \text{и} \quad \operatorname{curl} \mathbf{v} = -4\pi \mathbf{w},$$

можем написать

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \operatorname{curl} \mathbf{A}.$$

Но это выражение преобразуется следующим образом (стр 71, **56**)

$$\mathbf{v} \,.\, \operatorname{curl} \mathbf{A} = \operatorname{div} [\mathbf{v}\mathbf{A}] - \mathbf{A} \,.\, \operatorname{curl} \mathbf{v} = \operatorname{div} [\mathbf{v}\mathbf{A}] + 4\pi (\mathbf{A}\mathbf{w}).$$

Следовательно, энергия поля

$$T = \int \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi} do = \int \frac{\operatorname{div} [\mathbf{v}\mathbf{A}]}{8\pi} do + \int \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})}{2} do.$$

Первый интеграл справа можно преобразовать по теореме Гаусса в поток вектора $[\mathbf{v}\mathbf{A}]$ сквозь пограничную поверхность поля. Если

предполагать эту поверхность в бесконечности, т.-е. объемные интегралы распространять по всему бесконечному полю вектора или, если поверхность, хотя и конечная, но сквозь нее поток вектора $[\mathbf{vA}]$ равен нулю, тогда поверхностный интеграл из нашей формулы исчезает, и мы получаем для энергии поля два выражения:

$$T = \int \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi} do = \int \frac{(\mathbf{Aw})}{2} do.$$

Это означает, что энергию поля можно вычислять или по данному вектору $\mathbf{v}$ для всего поля, или по данным вектор-потенциалам $\mathbf{A}$ и вихрям $\mathbf{w}$ для тех объемов поля, которые заняты вихрями.

Здесь точно так же, как и в случае потенциального поля, (ср. стр. 84, **80**) интеграл правой части не нужно непременно распространять по объему всего поля, а только по тому объему, где имеются вихри, т.-е. где $\mathbf{w}$ не равно нулю.

104. Общий случай векторного поля. Положим, что нам требуется определить векторное поле $\mathbf{v}$, в котором имеются и источники ρ, и вихри $\mathbf{w}$. Следовательно, требуется удовлетворить одновременно уравнениям

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 4\pi \mathbf{w} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 4\pi \rho.$$

В таких случаях поступают следующим образом:

Предполагают поле $\mathbf{v}$ составленным из двух полей,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

из которых $\mathbf{v}_1$ без вихрей, но с источниками ρ, и следовательно, для него должны быть удовлетворены уравнения

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 4\pi\rho.$$

Это поле *потенциальное* и, следовательно, решается формулами

$$\mathbf{v}_1 = -\operatorname{grad} \varphi, \qquad \varphi = \int \frac{\rho do}{r}.$$

Другое поле $\mathbf{v}_2$ пусть будет образовано вихрями $\mathbf{w}$, но без источников:

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}_2 = 4\pi \mathbf{w} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0.$$

Для этого поля мы имеем решение

$$\mathbf{v}_2 = \operatorname{curl} \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{w} do}{r}.$$

Складывая оба поля, получаем

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 4\pi w \qquad \text{и} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 4\pi\rho,$$

т.-е. искомое поле $\mathbf{v}$.

Такое простое разложение поля $\mathbf{v}$ на два составляющих поля $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ допустимо при решении только потому, что все наши уравнения линейные, т.-е. *первой* степени.

Однако выражение для энергии есть функция *второй* степени, и необходимо исследовать, каково соотношение между энергиями слагаемых полей и результирующего поля.

Из формулы

$$\mathbf{v}^2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{v}_1)^2 + (\mathbf{v}_2)^2 + 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$$

мы видим, что кроме суммы энергий обоих полей, у нас появляется еще член с произведением $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$, который вообще говоря может и не быть равным нулю. Однако в *нашем* случае, когда одно поле потенциальное, а другое поле вихревое, этот член действительно пропадает, как мы это сейчас докажем.

Так как $\mathbf{v}_1 = -\operatorname{grad} \varphi$, то (стр. 69, **68**)

$$\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{div} (\varphi\mathbf{v}_2) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}_2,$$

а $\operatorname{div} \mathbf{v}_2$ у нас равно нулю; поэтому применяя теорему Гаусса, получаем

$$\int \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\, do = -\int \operatorname{div} (\varphi\mathbf{v}_2)\, do = -\oint \varphi \mathbf{v}_{2n} d\mathbf{S}.$$

Последний интеграл распространен по пограничной поверхости поля, которую мы предполагаем в бесконечности. А при бесконечно удаляющейся поверхности произведение $\varphi\mathbf{v}_2$ уменьшается как $\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r_2}$, между тем как сама поверхность растет как r^2, поэтому интеграл по поверхности стремится к нулю, как $\frac{1}{r}$, и следовательно

$$\int \frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{8\pi}\, do = 0.$$

Поэтому для энергии нашего результирующего поля получаем

$$\int \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi} do = \int \frac{\mathbf{v}_1{}^2}{8\pi} do + \int \frac{\mathbf{v}_2{}^2}{8\pi} do.$$

Итак, мы видим, что когда складываются два векторных поля, одно потенциальное, и другое вихревое, то общая энергия поля равна сумме энергий каждого поля в отдельности.

Когда же складываются два поля одинакового рода, т.-е. два потенциальных или два вихревых, то, кроме суммы собственных энергий этих полей, появляется еще новая, так называемая *взаимная* их энергия, пропорциональная скалярному произведению векторов обоих полей.

105. Вихри на поверхности. До сих пор мы рассматривали вихревые поля, в которых вектор $\mathbf{v}$ был везде *непрерывен* (ср. стр. 115 и 117, **98**, теорема Стокса).

Теперь представим себе два слоя жидкости (рис. 94), которые соприкасаются друг с другом по поверхности или тонкому слою *mm* и текут вдоль этой поверхности с различными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. В таком поле вектор $\mathbf{v}$ был бы у поверхности *mm* прерывен, при чем прерывною была бы *тангенциальная* составляющая этого вектора.

Мы уже разобрали случай прерывности у поверхности *нормальной* составляющей вектора (стр. 89, **84**, рис. 73) и показали, что для расчетов можно принимать, что эта поверхность покрыта источниками с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{v_{n1} - v_{n2}}{4\pi}.$$

Докажем теперь, что прерывность *тангенциальной* составляющей вектора $\mathbf{v}_t$ эквивалентна вихрям, расположенным вдоль данной поверхности с поверхностною плотностью.

$$\overline{\mathbf{w}} = \frac{|\mathbf{n}_1 (\mathbf{v}_{t1} - \mathbf{v}_{t2})|}{4\pi},$$

где $\mathbf{n}_1$ есть единичный вектор по нормали к поверхности.

С этою целью проведем нормально к границе *mm* двух потоков (рис. 94) небольшой замкнутый контур *abcd*, которого длины *bc* и *ad* (равные *dn*) ничтожны в сравнении с длинами *ab* и *cd*. Обо-

значим $ab = cd$ через dl и применим к этому контуру теорему Стокса. Пренебрегая интегрированием по путям dn, получаем

$$(\mathbf{v}_{t1} - \mathbf{v}_{t2})\, dl = 4\pi \mathbf{w}.\, dn\, dl,$$

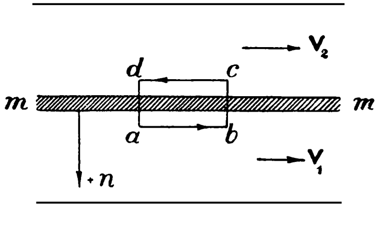


Рис. 94.

где $4\pi\mathbf{w}$ есть плотность вихрей, которые, как видно из рис. 94, направлены от чертежа к наблюдателю, т.-е. перпендикулярно к нормали $\mathbf{n}_1$ пограничной поверхности и перпендикулярно к скоростям $\mathbf{v}_t$. Все это мы можем выразить векторным уравнением, написав

$$4\pi \mathbf{w} dn = [\mathbf{n}_1.\, (\mathbf{v}_{t1} - \mathbf{v}_{t2})];$$

но $\mathbf{w}$ представляет собою *объемную* плотность вихрей, а потому, $\mathbf{w}\, dn$ будет не что иное, как поверхностная плотность вихря, которую мы обозначим через $\overline{\mathbf{w}}$.

Итак,

$$\overline{\mathbf{w}} = \frac{[\mathbf{n}_1.\, (\mathbf{v}_{t1} - \mathbf{v}_{t2})]}{4\pi},$$

что и требовалось доказать.

Заметим еще, что у подобной поверхности только тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{v}$ прерывны, между тем как вектор-потенциал $\mathbf{A}$ остается непрерывным.

Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ был бы тоже прерывен, если бы мы имели дело с двойным вихревым слоем. Например, если бы мы имели бесконечно тонкий слой текущей жидкости, который граничит с обеих сторон с неподвижной водой. Тогда по *двум* плоскостям соприкосновения жидкостей у нас получились бы вихри, направленные в противоположные стороны. Следовательно, в этом случае вектор $\mathbf{w}$, а следовательно, и вектор-потенциал $\mathbf{A}$ сделались бы прерывными (стр. 98, **90**). У нас, впрочем, таких случаев встречаться не будет.

106. Вихревая нить. Очень часто в поле бывают даны вихревые трубки настолько тонкие, в сравнении с другими расстояниями в поле, что мы можем считать их за *бесконечно тонкие нити*. Это иногда значительно упрощает вычисления.

Обозначим через $d\mathbf{S}$ поперечное (нормальное) сечение вихревой нити и через $d\mathbf{l}$ элемент ее длины; тогда элемент объема нити будет $do = d\mathbf{S}.d\mathbf{l}$, и вектор-потенциал выразится так (стр. 125, **102**):

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mathbf{w}}{r} do = \oint \frac{\mathbf{w}}{r} d\mathbf{S}.d\mathbf{l}.$$

Но мы знаем (стр. 123, **101**), что произведение ($\mathbf{w}\,d\mathbf{S}$) вдоль всей трубки одно и то же. Обозначив его через J, мы можем вынести его за знак интеграла и тогда получим

$$\mathbf{A} = J \oint \frac{d\mathbf{l}}{r}.$$

Если обозначить проекции элемента длины $d\mathbf{l}$ вихревой нити на оси координат через dx, dy, dz, то

$$A_x = J \oint \frac{dx}{r} \qquad A_y = J \oint \frac{dy}{r} \qquad A_z = J \oint \frac{dz}{r}.$$

Здесь все интегралы написаны с кружком, потому что интегрировать надо по вихревым нитям, которые обыкновенно всегда замкнуты.

Скалар J называется силою или иногда напряжением вихревой нити.

107. Поток, охватываемый вихревою нитью. Определим поток вектора $\mathbf{v}$ сквозь какую-либо поверхность, проведенную через контур вихревой нити.

По теореме Стокса этот поток равен

$$N = \int (\mathbf{v}_n.d\mathbf{S}) = \int (\mathrm{curl}\,\mathbf{A}.d\mathbf{S}) = \oint (\mathbf{A}.d\mathbf{l}).$$

Эта формула дает нам возможность определить поток не по вектору $\mathbf{v}$, а по вектор-потенциалу $\mathbf{A}$. Так как последний интеграл берется не по поверхности, проведенной через нить, а по *контуру* вихревой нити, то эта формула показывает, что любая поверхность, для которой вихревая нить служит пограничным контуром, пронизывается одним и тем же потоком вектора $\mathbf{v}$. Таким образом мы можем, не указывая поверхности, говорить о потоке, охватываемом данною вихревою нитью.

108. Закон Био и Савара. В электромагнетизме встречается соотношение, вполне аналогичное тому, которое мы получили между

полем **v** и силою вихревой нити J. Для того, чтобы показать это, возьмем уравнение

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$$

и напишем выражение для проекции вектора **v** на ось X, взяв выражения для A_z и A_y из стр. 132:

$$v_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = J \oint \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dz - J \oint \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dy;$$

подставляя сюда

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{r_y}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = -\frac{r_z}{r^3},$$

получаем под интегралом проекцию на ось X векторного произведения

$$[d\mathbf{l}.r]_x = dy.r_z - dz.r_y.$$

Так как подобные же формулы мы получим и для v_y и v_z, то можем все их написать одним векторным уравнением:

$$\mathbf{v} = J \int \frac{[d\mathbf{l}.\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Если написать эту формулу в дифференциальной форме,

$$d\mathbf{v} = J \frac{[d\mathbf{l}.\mathbf{r}]}{r^3} = J \frac{dl \sin (Jr)}{r^2},$$

то получаем формулу аналогичную с законом Био и Савара, где **v** означает напряжение магнитного поля **M**, образуемое элементом проводника $d\mathbf{l}$, по которому течет электрический ток силою J. Вектор $d\mathbf{M}$ перпендикулярен и к току J и к радиусу r (рис. 95).

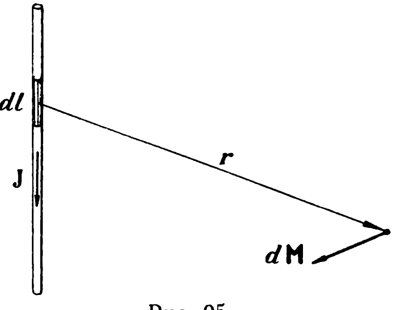


Рис. 95.

Таким образом электрические токи представляют собою вихри для магнитного поля.

109. Теорема Ампера. Покажем, что вихревая линия образует такое же поле **v**, как и двой-

ной поверхностный слой с плотностью биполей J, для которого вихревая линия служит пограничным контуром.

Мы уже доказали раньше (стр. 99, **91**), что двойной поверхностный слой с равномерной плотностью биполей η образует в точке P потенциал

$$\varphi = \eta \Omega,$$

где Ω есть телесный угол, под которым видна положительная сторона поверхности из точки P (рис. 96).

Составляющая вектора $\mathbf{v}$ по какому-либо направлению $\mathbf{s}$ будет в таком случае

$$\mathbf{v}_s = -\eta \frac{d\Omega}{ds}.$$

Вместо того, чтобы вычислять изменение угла, т.-е. $d\Omega$, при переходе по линии $d\mathbf{s}$, мы вычислим это изменение, передвигая весь двойной слой в противоположную сторону на длину $-d\mathbf{s}$ (рис. 97).

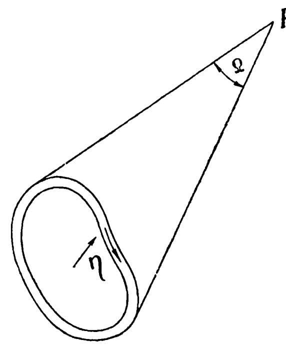


Рис. 96.

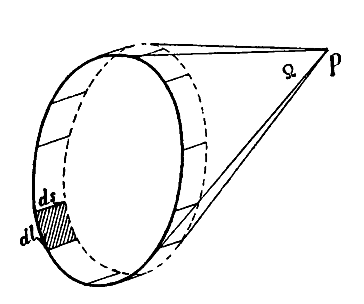


Рис. 97.

При этом каждый элемент длины вихревой линии $d\mathbf{l}$ опишет небольшую площадку

$$d\mathbf{S} = [-d\mathbf{s} \,.\, d\mathbf{l}].$$

Эта площадь будет видна из точки P под телесным углом

$$d\omega = \frac{d\mathbf{S} \,.\, \cos(nr)}{r^2} = \frac{[d\mathbf{s} \,.\, d\mathbf{l}] \,.\, \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{d\mathbf{s}[d\mathbf{l} \,.\, \mathbf{r}]}{r^3},$$

и полное изменение телесного угла $d\Omega$ для всей вихревой линии будет

$$d\Omega = -ds \int \frac{[d\mathbf{l} \,.\, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{v}_s = -\eta \frac{d\Omega}{ds} = \eta \int \frac{[d\mathbf{l} \,.\, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Но это выражение представляет собою ту же формулу Био-Савара, которую мы уже получили (стр. 133, **108**) для вихревой линии, только вместо силы вихревой нити J стоит теперь η.

Следовательно, поле вихревой нити с силою J одинаково с полем равномерного двойного слоя η, для которого эта нить служит границей. Форма поверхности двойного слоя не имеет значения.

Это соотношение в электромагнетизме называется теоремой Ампера. Ампер доказал, что магнитное поле тока J вполне эквивалентно полю тонкого листового магнита (магнитного листа, или двойного магнитного слоя), поверхность которого имеет своим контуром ток J и который намагничен равномерно поверхностною магнитною плотностью η, равною J.

Несмотря на это между полем замкнутой вихревой линии и полем покрывающего ее двойного слоя имеется следующее различие.

Потенциал двойного слоя *прерывен* и имеет скачек у поверхности двойного слоя (стр. 98, **90**)

$$\varphi_+ - \varphi_- = 4\pi\eta.$$

Потенциал вихревой линии *непрерывен*, но зато он *многозначен*, и интеграл по замкнутому пути, охватывающему вихревую линию (*циркуляция* поля), не равен нулю, а равен

$$\oint (\mathbf{v}_J \,.\, d\mathbf{s}) = 4\pi J.$$

Из этого мы видим, что скачек потенциала двойного слоя вполне соответствует циркуляции в поле вихревой нити.

110. Энергия поля вихревых нитей. Общую формулу для энергии вихревого поля

$$T = \int \frac{(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{w})}{2}\, do$$

можно несколько упростить в тех случаях, когда вихри состоят из очень тонких, в сравнении с их размерами, нитей.

В таких случаях можно постоянное для всей нити напряжение $J = wdS$ вынести за знак интеграла; тогда получим:

$$T = \frac{J}{2}\int (\mathbf{A}\,.\,d\mathbf{l}).$$

Но интеграл справа представляет собою поток N, охватываемый нитью (стр. 132, **107**), и, следовательно,

$$T = \frac{J}{2} N.$$

Если в данном поле несколько вихрей, то, очевидно, энергия их будет равна сумме подобных выражений

$$T = \sum_i \frac{J_i N_{ik}}{2}.$$

При этом каждый поток N_{ik}, стоящий в этих произведениях, нужно вычислять, распространяя интеграл

$$N_{ik} = \oint (\mathbf{A}_i d\mathbf{l}_k)$$

на все вихревые нити данного поля.

Положим, например, что у нас в поле две вихревые нити.

Тогда при расчете энергии нам нужно силу *первой* вихревой нити J_1 умножить на сумму двух потоков: на N_{11} — поток, образуемый первою нитью, и на N_{12} — на ту часть потока, образуемого *второй* вихревой нитью, которая проходит сквозь площадь первой нити.

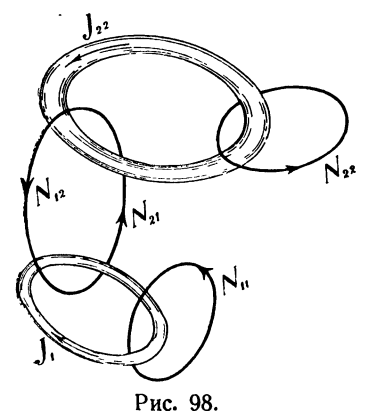


Рис. 98.

К этому необходимо прибавить произведение из силы второй вихревой нити J_2 опять на сумму двух потоков: N_{22} — поток, образуемый второй нитью, и N_{21} — часть потока, образуемого первой нитью и охватываемого второй нитью.

Для того, чтобы это было нагляднее, мы изобразили на рис. 98 схематически две вихревые нити J_1 и J_2 и при них три рода замкнутых векторных линий $\mathbf{v}$.

Линии N_{11} проходят только сквозь J_1. Линии N_{22} только сквозь J_2. Линии N_{21} и N_{12} охватываются и тою и другою вихревою нитью.

Энергия всего поля вектора $\mathbf{v}$ будет теперь равна

$$T=\frac{1}{2}\left(J_1N_{11}+J_1N_{12}+J_2N_{21}+J_2N_{22}\right).$$

Каждый из потоков N мы можем выразить через соответствующий вектор-потенциал $\mathbf{A}$. Эти последние будут для наших вихревых нитей соответственно

$$\mathbf{A}_1=J_1\oint\frac{d\mathbf{l}_1}{r},\qquad \mathbf{A}_2=J_2\oint\frac{d\mathbf{l}_2}{r},$$

и, следовательно, поток (стр. 136)

$$N_{11}=\oint(\mathbf{A}_1\,.\,d\mathbf{l}_1)=J_1\oint\oint\frac{(d\mathbf{l}_1\,.\,d\mathbf{l}_1)}{r}=J_1L_{11}.$$

Здесь $(d\mathbf{l}_1\,.\,d\mathbf{l}_1)$ означает скаларное произведение каждого элемента длины первой вихревой нити на *каждый из других* элементов той же нити и на cos угла между ними. Подобные интегралы по всем элементам нити, значение которых зависит от геометрических размеров и форм нити, принято обозначать буквою L.

Аналогично с этим, получаем для второй нити

$$N_{22}=J_2\oint\oint\frac{(d\mathbf{l}_2\,.\,d\mathbf{l}_2)}{r}=J_2L_{22}.$$

Наконец, для потоков, охватываемых обеими нитями сразу:

$$N_{12}=J_2\oint\oint\frac{(d\mathbf{l}_1\,.\,d\mathbf{l}_2)}{r}=J_2L_{12}$$

$$N_{21}=J_1\oint\oint\frac{(d\mathbf{l}_2\,.\,d\mathbf{l}_1)}{r}=J_1L_{21}.$$

В этих интегралах произведение

$$(d\mathbf{l}_1\,.\,d\mathbf{l}_2)=dl_1dl_2\,\cos\,(dl_1dl_2)$$

должно быть взято по всем комбинациям каждого элемента первой вихревой нити с каждым элементом второй нити.

На основании симметрии выражения $(d\mathbf{l}_1 \, . \, d\mathbf{l}_2)$ заключаем, что

$$L_{12} = L_{21}.$$

Поэтому энергию поля вектора **v**, обусловленного двумя вихревыми нитями силою J_1 и J_2, можно выразить так

$$T = \frac{1}{2} L_1 J_1^2 = \frac{1}{2} L_2 J_2^2 + L_{12} J_1 J_2.$$

Первые два члена в этом выражении представляют собою энергии каждой вихревой нити в отдельности; последний член называется взаимной энергией обеих нитей.

Что энергия полей двух вихрей *не равна* сумме их энергий, взятых в отдельности, это нас не должно удивлять, на это мы еще указали в конце **§ 104**, стр. 128.

Коэффициенты L в выражениях для потоков и энергий принято называть терминами, взятыми из электродинамики. При этом L_{11} и L_{22} называются коэффициентами *самоиндукции* каждой вихревой нити, а L_{12} называется коэффициентом их *взаимной* индукции.

111. Различные выражения для энергии. Из всего вышесказанного мы видим, что энергию поля вектора **v**, обусловленного вихревыми нитями с плотностью **w**, мы можем выразить следующими формулами:

1) по вектору **v**

$$T = \int \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi} do;$$

2) по вектор-потенциалу **A** и по плотности вихрей **w**

$$T = \int \frac{(\mathbf{A} \, . \, \mathbf{w})}{2} do;$$

3) для вихревых нитей, — по их силе J и по охватываемому ими потоку N вектора **v**

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ik} J_i N_{ik};$$

4) для тех же вихревых нитей, — по их самоиндукции L_{ii} и их взаимной индукции L_{ik} и силе их вихрей J

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ik} L_{ik} J_i J_k.$$

В последней формуле, вследствие равенства $L_{ik} = L_{ki}$, можно некоторые члены соединить попарно.

Когда $i = k$, мы будем иметь коэффициент *самоиндукции.*

112. Поле цилиндрического вихря. Расчеты полей по данным вихрям гораздо сложнее, чем по данным источникам. Мы не можем здесь входить в подробности этих расчетов, но считаем полезным разобрать один простейший пример.

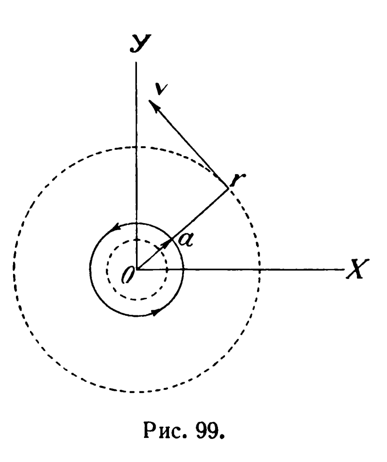


Рис. 99.

Положим, нам дан прямой цилиндр кругового сечения. Ось цилиндра направлена перпендикулярно к рис. 99 (т.-е. по оси Z), радиус его a, и он сплошь заполнен вихрями плотностью i, которых направление по оси $+Z$, т.-е. от чертежа к наблюдателю. Величина i пусть будет некоторою функциею расстояния от оси O.

Поток вихрей для всего цилиндра мы обозначим через J

$$J = \int i \, . \, dS = \int_0^a f(r) \, . \, 2\pi r \, dr.$$

А уравнение для вектора $\mathbf{v}$ напишем, как и раньше, с множителем 4π:

$$\text{curl}\ \mathbf{v} = 4\pi i.$$

Величину J будем называть силою вихря.

Наружное пространство лишено вихрей, и в нем

$$\text{curl}\ \mathbf{v} = 0.$$

Вследствие цилиндрической симметрии всего поля вектор $\mathbf{v}$ будет везде направлен по окружностям с центрами по оси вихря и будет функцией одного только расстояния от оси цилиндра. Мы можем определить его поле, не прибегая к векторному потенциалу. Действительно, обходя по окружности радиуса r, мы будем везде

иметь одну и ту же величину $\mathbf{v}$, и, следовательно, циркуляция будет равна

$$\oint (\mathbf{v}_s d\mathbf{s}) = v \,.\, 2\pi r.$$

По теореме Стокса, циркуляция должна быть равна потоку вихря сквозь площадь нашего контура, т.-е. сквозь площадь окружности радиуса r. Но в этой площади только средняя часть занята вихрями, и поток их равен J, а потому

$$v.2\pi r = 4\pi J,$$

и, следовательно,

$$v = \frac{2J}{r}.$$

Величина вектора v оказывается обратно пропорциональной расстоянию от оси вихря.

Это соотношение остается верным для всех расстояний от оси поля при r большем a. Таким образом, наружное поле цилиндрического вихря таково, как будто все вихри были сосредоточены по оси цилиндра.

Направление вектора $\mathbf{v}$ будет везде перпендикулярно к r, векторные линии будут окружности. Взаимное направление вектора $\mathbf{v}$ и вихрей $\mathbf{i}$ связаны друг с другом правилом буравчика или штопора. На рис. 99 поле вектора $\mathbf{v}$ направлено по окружностям против движения стрелки часов: буравчик при таком повороте ручки будет *вывинчиваться*, т.-е. итти от чертежа к наблюдателю. Так именно и направлены у нас оси вихрей $\mathbf{i}$.

Правило буравчика или штопора вообще винта с *правою* нарезкою, было предложено Максвеллом для более легкого запоминания направления магнитного поля $\mathbf{M}$ (у нас это вектор $\mathbf{v}$) относительно электрического тока $\mathbf{J}$.

Для поля *внутри* цилиндра $r < a$ мы должны написать

$$v \,.\, 2\pi r = 4\pi \int f(r) \,.\, 2\pi r \, dr.$$

Если плотность вихрей по всему сечению цилиндра одна и та же, тогда получим

$$v \,.\, 2\pi r = 4\pi i \pi r^2$$

$$v = 2\pi i r.$$

На оси цилиндра $r=0$ и поле вектора v равно нулю, затем оно растет пропорционально радиусу до $r=a$; затем опять уменьшается обратно пропорционально расстоянию.

Легко сообразить, что внутри пустого цилиндра поле будет равно нулю.

Определим еще энергию нашего вихревого поля по формуле

$$T=\int \frac{\mathbf{v}^2}{8\pi}\, do.$$

Так как вектор $\mathbf{v}$ зависит только от r, то для элемента объема удобнее всего взять разность объемов двух цилиндров высотою, равной единице длины, и радиусов r и $r+dr$; этот объем будет равен

$$do=2\pi r\,.\,dr.$$

Для поля *внутри* цилиндра, где

$$v=2\pi i r,$$

имеем энергию единицы длины вихря:

$$T_i=\int_o^a \pi^2 i^2 r^3\, dr=(\pi a^2 i)^2\,\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\,J^2.$$

Для наружного поля, где

$$v=\frac{2J}{r},$$

$$T_a=\int_a^r J^2\,\frac{dr}{r}=J^2 \lg\frac{r}{a}.$$

Распространяя интеграл на все бесконечное поле вихря, получаем для энергии единицы длины вихря бесконечную величину.

Заметим, что наш цилиндрический вихрь надо себе представлять продолжающимся в обе стороны в бесконечность. Следовательно, в нашем случае в бесконечности имеются вихри.

113. Пара цилиндрических вихрей. Рассмотрим поле двух параллельных цилиндрических вихрей (рис. 100) с радиусами a и b, оси которых находятся на расстоянии $2d$ друг от друга.

Вихри в обоих цилиндрах $+J$ и $-J$ пусть будут равны и противоположны друг другу, так что каждый из вихрей служит как бы замыканием другому.

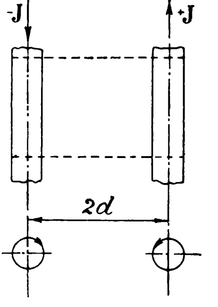


Рис. 100.

Для простоты мы будем предполагать, что радиусы a и b малы сравнительно с расстоянием $2d$. В таком случае можем считать внутреннее поле каждого вихря таким, как если бы другого вихря не существовало, и тогда внутренняя энергия обоих вихрей на единице длины их будет:

$$T_i = 2 \,.\, J^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2} J^2.$$

Наружную энергию определим по формуле для вихревых нитей (стр. 136, **110**)

$$T = \frac{1}{2} JN,$$

где N — поток вектора $\mathbf{v}$, охватываемый нашей парой цилиндрических вихрей при длине их, равной единице.

Поле вектора $\mathbf{v}_n$ в *плоскости вихрей* и притом в пространстве *между* ними будет равно сумме полей каждого из этих вихрей, т.-е. (стр. 140)

$$v = 2J\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right),$$

где r — расстояние от первого вихря, а $(d-r)$ — расстояние от второго вихря.

Элемент площади высотою равной единице будет dr. При определении потока N в пространстве между вихрями нужно будет интегрирование по r распространить от $r=a$ до $r=d-b$. Итак,

$$N = 2J\int_a^{d-b}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)dr = 2J\left[\lg\left(\frac{r}{d-r}\right)\right]^{d-b}_{a} =$$

$$= 2J \lg\frac{(d-a)(d-b)}{ab},$$

и наружная энергия

$$T_a = J^2 \lg\frac{(d-a)(d-b)}{ab}.$$

Полная энергия поля на единицу длины нашей *пары* цилиндрических вихрей будет

$$T=\frac{1}{2}J^2\left[2\lg\frac{(d-a)(d-b)}{ab}+1\right].$$

Если здесь предположить радиусы обоих вихрей равными, и в числителе lg пренебречь радиусами в сравнении с расстояниями, то получим

$$T=\frac{1}{2}J^2\left[4\lg\frac{d}{a}+1\right].$$

Наконец, для коэффициента самоиндукции пары вихрей, считая на каждую единицу их длины, имеем выражение

$$L=4\lg\frac{d}{a}+1.$$

4. ПЛОСКОЕ ПОЛЕ.

114. Логарифмический потенциал. Бывают случаи, когда поле расположено параллельно какой-либо плоскости, — пусть это будет плоскость (XY), — и все величины в поле не зависят от Z. Для таких полей, которые называются *плоскими полями,* расчеты значительно упрощаются. Кроме того, в этих случаях мы имеем возможность использовать специальный математический метод (функции комплексного переменного), о котором мы скажем ниже.

Как пример подобного случая мы можем взять поле источников, расположенных с равномерною плотностью ρ в цилиндре, параллельном оси Z.

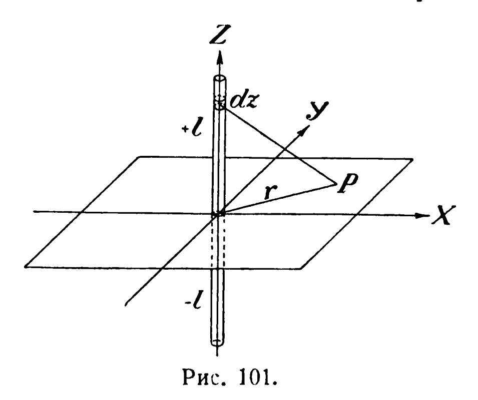


Рис. 101.

Потенциал такого цилиндра в точке P плоскости XY (рис. 101) будет по общей формуле (стр. 83, **79**)

$$\varphi=\int\frac{\rho dSdz}{\sqrt{z^2+r^2}},$$

где dS — элемент площади поперечного сечения цилиндра, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ есть расстояние точки P от начала координат, куда проектируется поперечное сечение dS.

Интегрируя это выражение по всей длине цилиндра, получаем

$$\varphi = \int_{-l}^{+l} \frac{\rho dS \,.\, dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \int \rho \, dS \,.\, \lg \frac{l + \sqrt{l^2 + r^2}}{-l + \sqrt{l^2 + r^2}} \cdot$$

Но выражение логарифма при очень большом l можно представить так:

$$\lg \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}}{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} = \lg \frac{2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2} = \lg 4 \left(\frac{l}{r}\right)^2 = 2 \lg \frac{2l}{r} \,.$$

Логарифм числителя будет, правда, очень большая, но *постоянная* величина, а потому для вычисления градиента она не имеет значения, и мы можем ее опустить, написав потенциал так:

$$\varphi = \int 2\rho \,.\, dS \,.\, \lg \frac{1}{r} \cdot$$

Если сравним это выражение с обычным выражением потенциала в пространстве, то увидим, что в данном случае вычисления надо производить так, как будто на плоскости XY были размещены источники с *поверхностною* плотностью $\sigma = 2\rho$, а вместо того, чтобы множить силу этих источников на $\frac{1}{r}$, надо множить их на $\lg \frac{1}{r}$.

Поэтому-то потенциал в *плоском* поле и принято называть *логарифмическим потенциалом.*

В пространстве мы имели для *источника* e потенциал

$$\varphi = \frac{e}{r}; \qquad \mathrm{v} = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{e}{r^2},$$

и градиент поля был обратно пропорционален *квадрату* расстояния от источника.

Здесь, в плоском поле у нас источником будет

$$\int 2\rho\, dS = 2e,$$

и его потенциал

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r}; \qquad \mathbf{v} = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2e}{r},$$

градиент обратно пропорционален первой степени расстояния.

Легко убедиться, непосредственной подстановкой в том, что уравнение Лапласа, которое при трех измерениях было

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

и имело решение:

$$\varphi = \int \rho\, do \,.\, \frac{1}{r},$$

для плоского поля получает такой вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -2\pi\rho,$$

и имеем решение:

$$\varphi = \int \sigma\, dS . \lg \frac{1}{r} \cdot$$

Соответственным образом меняются и формулы Грина и т. д.

115. Функция и линия потока. Расхождение вектора в плоском поле для тех точек, где нет источников, должно быть подчинено условию

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

потому что производная по z равна нулю.

Это дает нам право искать такую функцию ψ, чтобы

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = +\frac{\partial\psi}{x} \cdot$$

Действительно, эти значения v_x и v_y удовлетворяют вышенаписанному уравнению.

Далее, если вычислить вихрь этого поля

$$\mathbf{w} = \operatorname{curl} \mathbf{v},$$

$$w_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

$$w_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

$$w_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

В последнем уравнении скалар ψ является в роли вектор-потенциала по оси Z. (Ср. стр. 123, **102**.)

Для тех точек поля, где нет источников, у нас должно иметь место уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

а для тех точек поля, где нет вихрей, должно удовлетворяться уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Как видим, функции φ и ψ имеют много сходного.

Выясним же *геометрический* смысл функции ψ подобно тому, как это мы сделали в свое время для φ.

Напишем для этого полный дифференциал функции ψ:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = v_y dx - v_x dy$$

и покажем, что величина $d\psi$ представляет собою *поток* вектора $\mathbf{v}$ сквозь некоторый элемент линии $d\mathbf{s}$, проекции которого на оси координат суть dx и dy.

Заметим, что потоки в плоском поле вычисляются не сквозь площадки $d\mathbf{S}$, а сквозь элементы линий $d\mathbf{s}$. Однако для более наглядного представления мы всегда можем считать, что наш элемент линии $d\mathbf{s}$ в плоскости xy на самом деле представляет собою *сечение* площадки $d\mathbf{S}$ плоскостью XY; ширину же этой площадки по оси Z можем считать равной единице.

Итак, представим себе в плоскости XY (рис. 102) элемент линии ab, равной $d\mathbf{s}$. Проведем к этому элементу *положительную* нормаль так, чтобы направления $d\mathbf{s}, +\mathbf{n}_1$ и Z были друг относительно друга по право-винтовой системе.

Для определения потока сквозь $d\mathbf{s}$ разложим этот элемент по осям X и Y. Ширина этого элемента по оси X будет $+dx$ и поток $v_y dx$; ширина же его по оси Y будет $-dy$ и поток $-v_x dy$. Как видим, полный поток вектора $\mathbf{v}$ сквозь линию $d\mathbf{s}$ равен

$$d\psi = v_y dx - v_x dy.$$

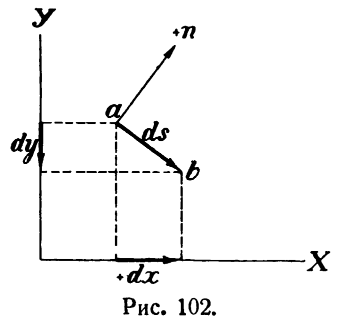


Рис. 102.

То же самое мы можем получить чисто формальным способом, пользуясь векторной алгеброй.

Для потока сквозь площадку $d\mathbf{S}$, построенную на линии $d\mathbf{s}$ и шириною равную $\mathbf{z}_1 = 1$, мы имеем формулу

$$(\mathbf{v} \,.\, d\mathbf{S}) = \mathbf{v}\ [\mathbf{z}_1 \,.\, d\mathbf{s}].$$

Переставляя множители в последнем произведении и полагая $z_1 = 1$, получаем

$$z_1 [d\mathbf{s} \,.\, \mathbf{v}] = v_y dx - v_x dy = d\psi,$$

т.-е. то же, что и выше.

Будем продолжать дальше наше рассмотрение функций φ и ψ параллельно.

Подобно тому как мы проводили в поле эквипотенциальные линии (где $d\varphi = 0$), точно так же мы можем теперь провести линии равного потока (где $d\psi = 0$).

Для линий равного потенциала получим:

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy = 0,$$

и тангенс угла наклонения их к оси X

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

Точно так же для линий постоянного потока

$$d\psi = v_y\,dx - v_x\,dy = 0,$$

и тангенс угла наклонения их к оси X будет

$$\operatorname{tg}\beta = +\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = -\cot\alpha.$$

Из этого мы видим, что линии

$$\varphi = \text{Const. и } \psi = \text{Const.}$$

перпендикулярны друг к другу. Они образуют *ортогональную* систему линий.

Отсюда мы заключаем, что если φ суть потенциальные линии, а ψ — линии потока, то в каком-либо другом поле наобсрот линии ψ могут служить эквипотенциальными линиями, а φ — линиями потока. Обе эти системы линий *взаимны*.

116. Функция комплексного переменного. Если сопоставить уравнения для φ и ψ друг с другом,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

то получаем так называемые условия Коши-Римана, которые должны быть удовлетворены для того, чтобы комплексная величина

$$w = \varphi + i\psi,$$

где

$$i = \sqrt{-1},$$

а φ и ψ действительны, могла считаться *аналитическою* функцией переменной

$$z = x + iy,$$

$$w = \varphi + i\psi = f(x + iy) = f(z)$$

и иметь *определенную*, независящую от dz, производную:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z).$$

Значение этого условия мы выясним ниже, а сейчас мы можем вывести из него следующее соотношение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

или

$$(\text{grad}\,\varphi\,.\,\text{grad}\,\psi)=0.$$

Это и есть не что иное, как выведенная нами в предыдущем параграфе теорема об *ортогональности* линий $\varphi=\text{Const.}$ и $\psi=\text{Const.}$

Таким образом, любая аналитическая функция w мнимого переменного z может дать нам сразу *две* функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, линии которых ортогональны друг к другу.

А это как раз и требуется для изображения плоского поля в тех точках, где нет источников и нет вихрей. Вот почему теория функции комплексного переменного получила такое большое значение для теории поля.

Мы не можем здесь подробно останавливаться на этой теории, а ограничимся только самым необходимым, отсылая интересующихся к специальным курсам математики, посвященным теории функций комплексного переменного.

117. Изображение комплексных величин векторами. Комплексную величину обыкновенно представляют в виде суммы из двух частей: *действительной* и *мнимой*:

$$z=x+iy,$$

где $i=\sqrt{-1}$, а x и y суть *действительные* величины. Если x и y принять за Декартовы координаты на плоскости XY, то каждой комплексной величине Z будет на этой плоскости (рис. 103) соответствовать определенная точка Z.

Вводя круговые координаты r и α по уравнениям

$$x=r\cos\alpha,\qquad y=r\sin\alpha,$$

$$x^2+y^2=r^2,\qquad \frac{y}{x}=\text{tg}\,\alpha,$$

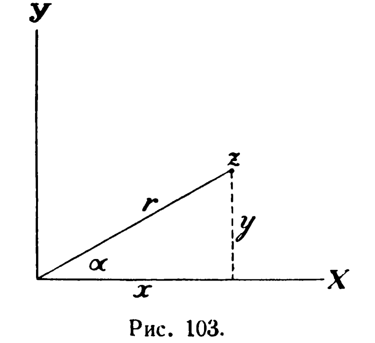


Рис. 103.

получаем

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha},$$

где $e = 2{,}718.....$ основание Неперовых логарифмов. Основываясь на этих соотношениях, мы можем комплексную величину z изобразить также в виде вектора $\mathbf{r}$. Скаларная величина этого вектора r называется *абсолютной* величиной z, а угол α, определяющий направление вектора r, называется *аргументом* комплексной величины z.

Напомним читателю главнейшие правила для комплексных величин.

При сложении и вычитании комплексных величин складываются и вычитаются их действительные и их мнимые составляющие x и y *отдельно:*

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

т.-е. совершенно так же, как складываются составляющие по осям координат какого-либо вектора. Поэтому мы можем написать

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$$

и складывать комплексные величины *геометрически*, по правилу параллелограмма.

В произведении

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_2)$$

первый член: $r_1 r_2(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) = r_1 r_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$,
второй член: $r_1 r_2(\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_1) = r_1 r_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$,
а потому

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Следовательно, в произведении комплексных величин скаларные величины радиусов перемножаются, а аргументы складываются.

При делении, наоборот, радиусы делятся друг на друга, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

В *сопряженных* величинах

$$z_1 = x + iy, \qquad z_2 = x - iy$$

оба вектора одинаковы, но углы α противоположных знаков; следовательно, точки z_1 и z_2 симметрично расположены по обе стороны оси X. При этом

$$z_1 + z_2 = 2x, \qquad z_1 - z_2 = 2iy,$$

$$z_1 z_2 = x^2 + y^2 = r^2.$$

Возведение в степень дает

$$z^n = r^n e^{in\alpha},$$

при этом вектор $\mathbf{r}$ возводится в n-ую степень, а угол его наклонен к оси X-ов увеличивается в n раз.

Умножение z на *действительную* величину оставляет направление $\mathbf{r}$ неизменным.

Умножение z на $i = \sqrt{-1}$ оставляет величину вектора неизменною, но поворачивает его на угол $\frac{\pi}{2}$ (90°). При умножении на i еще раз — происходит поворот еще на $\frac{\pi}{2}$, всего на π (180°). Другими словами, множитель $i^2 = -1$ меняет направление вектора на противоположное, как это имеет место и для обыкновенных действительных векторов.

118. Аналитические функции. Мы уже указали выше, что условие Коши-Римана необходимо для того, чтобы $f(z)$ имела определенную, независимую от dz, производную. Поясним это и геометрически.

Положим, что дана какая-либо функция

$$w = f(z).$$

Так как z и w можно изобразить векторами, то написанное соотношение есть собственно говоря векторное уравнение, которое указывает нам — каким образом из вектора $\mathbf{z}$ можно получить вектор $\mathbf{w}$. Если мы изменим вектор $\mathbf{z}$ на $d\mathbf{z}$, т.-е. перейдем в соседнюю точку поля, то и вектор $\mathbf{w}$ должен будет измениться на $d\mathbf{w}$ (см. рис. 104).

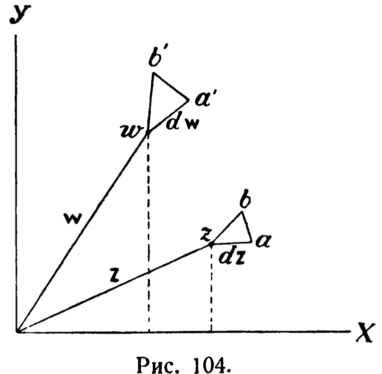


Рис. 104.

Но так как $d\mathbf{z}$ и $d\mathbf{w}$ суть векторы, то предел отношения обеих этих величин может, вообще говоря, зависеть от их направления. Ведь и раньше мы избегали делить вектор на вектор (стр. 31, **34**) и никогда не брали производную по вектору ввиду этой неопределенности. Поэтому-то Коши и Риман поставили для аналитических функций мнимого переменного условие, чтобы величина производной

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)$$

не зависела от того, к каким именно соседним с z точкам мы переходим для определения этой производной, другими словами, чтобы величина производной не зависела от *направления* $d\mathbf{z}$.

Возьмем один раз $\mathbf{z}$ параллельно оси X, а другой раз параллельно оси Y и напишем условия того, чтобы производные в обоих случаях были одинаковы, т.-е.

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+i\psi)=\frac{\partial}{\partial(iy)}(\varphi+i\psi),$$

тогда и получаем условие Коши-Римана.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y};\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}.$$

Можно доказать и обратную теорему, что эти условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы $f(z)$ имела независимую от dz производную.

119. Конформное отображение. Представим себе две плоскости (XY) и $(\varphi\psi)$. Если на плоскости (XY) мы будем брать различные точки $\mathbf{z}$, то на другой плоскости $(\varphi\psi)$ им будут соответствовать, вообще говоря, различные точки $\mathbf{w}$.

Мы можем сказать, что плоскость (XY) отображается на плоскости $(\varphi\psi)$, или наоборот — плоскость $(\varphi\psi)$ отображается на (XY). Правда, при некоторых формах $f(z)$ это отображение будет многозначным, но на это мы можем пока не обращать внимания.

Производная

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)$$

тоже будет некоторою функциею z, и мы можем ее представить в виде

$$\frac{dw}{dz} = r' e^{i\beta}.$$

При этом r' будет абсолютною величиною *отношения* dw к dz, — назовем его *увеличением* нашего отображения, — угол же β будет представлять *разность* (см. стр. 150, **117**) углов, образуемых векторами dw и dz с горизонтальною осью X (см. рис. 104); назовем угол β *поворотом* нашего отображения.

Но если функция $f(z)$ аналитическая и ее производная не зависит от dz, то для всех dz около данной точки z увеличение и поворот отображения будет один и тот же. Значит, если мы около точки z начертим какую-либо маленькую фигуру, например треугольник (рис. 104), то при отображении в точку w все стороны этой фигуры изменятся в одном и том же отношении и повернутся на один и тот же угол. — Следовательно, углы между сторонами не изменятся, и фигура останется *себе подобной*.

Такое отображение называется *конформным*, потому что при нем сохраняется форма, т.-е. подобие любой небольшой, строго говоря, бесконечно малой фигуры.

Заметим, что как r', так и β, т.-е. увеличение и поворот для различных точек плоскости (XY) будут, вообще говоря, разные, потому что $f'(z)$ есть функция z. Фигуры *конечной* величины будут, вообще говоря, искажаться; подобие имеет место только для *бесконечно малых* фигур.

Тем не менее, такое отображение имеет большое и теоретическое и практическое значение. Так, например, конформное изображение употребляют на практике при черчении географических карт.

Из того обстоятельства, что углы при конформном изображении сохраняются, мы можем сейчас же заключить, что любой системе *ортогональных* линий на плоскости (XY) соответствует тоже ортогональная система линий на плоскости $(\varphi\psi)$. Ортогональные системы в особенности важны для теории поля, поэтому на них мы остановимся подробнее.

120. Изображение функций комплексного переменного. Если дана какая-либо функция w комплексного переменного z

$$w = \varphi + i\psi = f(x + iy),$$

то, приравняв отдельно действительные и мнимые части, получим φ и ψ как функции x и y:

$$\varphi(x,y), \qquad \psi(x,y)$$

или наоборот, x и y как функции φ и ψ:

$$x(\varphi,\psi), \qquad y(\varphi,\psi).$$

Если давать φ и ψ значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и т. д. вообще C, то получим на плоскости (XY) ортогональную систему кривых линий с параметром C

$$\varphi(x,y) = C; \quad \psi(x,y) = C.$$

Наоборот, если будем x и y давать те же значения, то на другой плоскости, где Декартовыми координатами служат φ и ψ, получим тоже ортогональную систему кривых линий

$$x(\varphi, \psi) = C; \quad y(\varphi, \psi) = C.$$

Таким образом, любая аналитическая функция комплексного переменного может быть изображена двумя плоскими полями, причем в каждом из этих полей получаются *две* системы ортогональных друг к другу линий.

В теории функций комплексного переменного по форме этих линий судят о свойствах данной функции.

В применении же к теории поля каждая из плоскостей (XY) и $(\varphi\psi)$ при данной функции $f(r)$ может изображать два случая плоского физического поля, так как эквипотенциальные линии одного случая могут служить линиями потока (струйками) для другого случая, и наоборот.

Некоторые функции комплексного переменного имеют *особые* точки и линии, где они делаются бесконечными или прерывными (нечто подобное мы имели в потенциальном поле трех измерений), или перестают быть аналитическими. Но мы не можем здесь останавливаться на этих случаях, а ограничимся несколькими наиболее важными для теоретической физики примерами.

121. Пример $\mathbf{w} = \mathbf{z}^2$. Отделив в этом уравнении действительную часть от мнимой, имеем

$$w = \varphi + i\psi = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

откуда

$$\varphi = x^2 - y^2, \quad \psi = 2xy.$$

Следовательно, если мы на плоскости $(\varphi\psi)$ возьмем *однородное* поле, т.-е. систему вертикальных прямых линий (рис. 105)

$$\varphi = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

и горизонтальных прямых линий $\psi = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то на плоскости (XY) им будут соответствовать две системы равносторонних гипербол (рис. 106)

$$x^2 - y^2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

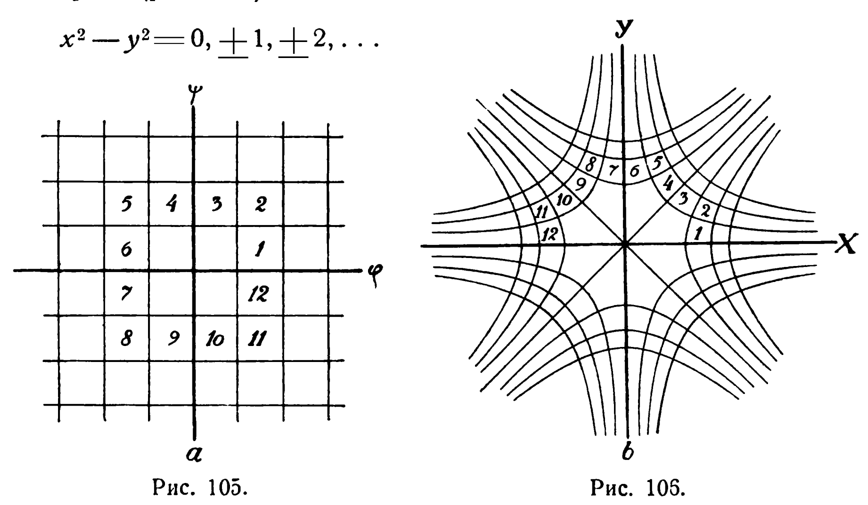


Рис. 105. Рис. 106.

с осями X и Y, и к ним ортогональные две системы тоже равносторонних гипербол с осями X' и Y'. Оси каждой из этих систем служат ассимптотами другой системы.

Полученное нами поле может служить для решения различных задач. Например, при движении несжимаемой жидкости в углу, ограниченном плоскостями XZ и YZ, мы должны получить поле именно такой формы.

Заметим, что начало координат служит здесь *особой* точкой: здесь обе системы гипербол обращаются в прямые линии, которые уже *не* ортогональны друг к другу, а наклонены под углом в 45°.

На рисунке 105 мы перенумеровали центральные квадраты. Им соответствует на плоскости (XY) *вдвое* большее число четыре-угольников. Вообще, *вся* плоскость $(\varphi\psi)$ отображается на *половине* плоскости (XY).

Если бы мы взяли $w = z^n$, то получили бы отображение плоскости $(\varphi\psi)$ на $\frac{1}{n}$ плоскости (XY), и это дало бы нам возможность решать задачи движения жидкости в углу, равном $\frac{\pi}{n}$, и т. д.

Если бы мы задались на плоскости (XY) однородным полем и положили x и y равными $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то на плоскости $(\varphi\psi)$ получили бы кривые

$$+\varphi + \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} = 2x^2 = 0, \pm 2, \pm 8, + \ldots$$

$$-\varphi + \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} = 2y^2 = 0, \pm 2, \pm 8, + \ldots$$

Это будет система парабол с фокусом в начале координат.

Вместо однородного поля мы можем задаться и другим каким-либо *известным* нам полем (например радиальным), а при помощи преобразования z^n получить из него целый ряд новых полей, которые могут оказаться полезными на практике.

122. Пример $\mathbf{w = -e \lg z}$. Для иллюстрации этой функции

$$w = -e \lg z$$

перейдем к круговым координатам, положив

$$z = re^{i\alpha},$$

тогда

$$w = \varphi + i\psi = -e \lg r - ie\alpha$$

и, следовательно,

$$\varphi = -e \lg r; \quad \psi = -e\alpha.$$

Для φ мы получим логарифмический потенциал источника e в начале координат. Линии потока ψ будут $\alpha = \text{Const.}$, т.-е. будут радиальны.

Вектор $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi = \frac{e}{r}$ убывает пропорционально расстоянию от начала координат. В начале координат градиент (например скорость жидкости) делается бесконечно большим. То же самое мы уже имели в поле трех измерений, только там градиент был обратно пропорционален квадрату расстояния.

Если наоборот $\psi = \text{Const.}$ считать за эквипотенциальные линии, то линии потока будут

$$\varphi = -e \lg r = \text{Const.}, \text{ или } r = \text{Const.},$$

т.-е. круги с центром в начале координат.

Подобное поле представляет собою жидкость, вращающаяся вокруг оси Z со скоростью

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{r\, d\alpha} = \frac{e}{r}.$$

Здесь тоже скорость убывает пропорционально расстоянию и делается бесконечною в начале координат. Следовательно, начало координат опять является особою точкою.

Но кроме того, хотя в рассматриваемом случае и нет вихрей:

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0,$$

тем не менее, циркуляция вокруг начала координат будет

$$\oint (\mathbf{v}.d\mathbf{s}) = \oint (\mathbf{v}.r d\alpha) = 2\pi e$$

и не равна нулю. Следовательно, в начале координат мы должны предположить вихревую нить, направленную по оси Z. (Ср. стр. 139, **112.**)

123. Пример $\mathbf{w} = \mathbf{e} \lg \frac{\mathbf{z} - \mathbf{d}}{\mathbf{z} + \mathbf{d}}$. Подобно тому как и в предыдущем параграфе, положим

$$z - d = r_1 e^{i\alpha_1}$$

$$z + d = r_2 e^{i\alpha_2};$$

тогда получим

$$\varphi = -e \lg \frac{r_1}{r_2} = -e \lg r_1 + e \lg r_2, \quad \psi = -e\,(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Из этих формул мы видим, что φ есть логарифмический потенциал двух источников, равной, но противоположной по знаку, силы. Оба источника лежат на оси X, и если положить

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

то

$$r_1 = x - d$$

$$r_2 = x + d.$$

Следовательно, расстояние между источниками

$$r_1 - r_2 = 2d.$$

Не нужно, однако, этот случай смешивать со случаем двойного полюса, потому что источнику на плоскости соответствует в пространстве целая линия, параллельная оси Z, покрытая источниками с линейною плоскостью $2e$ (см. стр. 142, **114**). Форма эквипотенциальных линий и линий потоков на плоскости XY получается для обоих этих случаев разная.

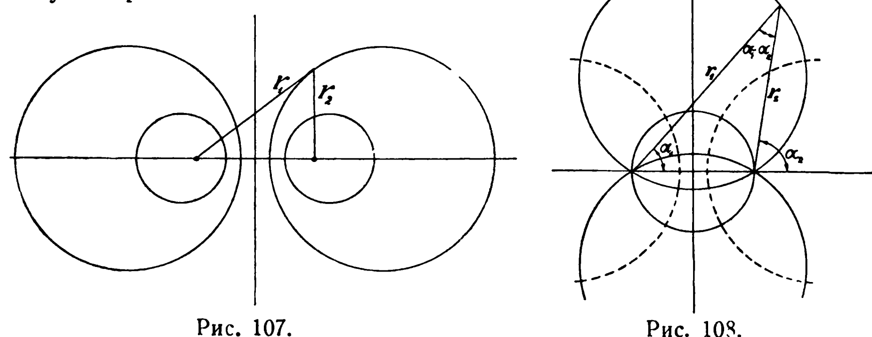


Рис. 107. Рис. 108.

В нашем случае для линий равных потенциалов мы имеем

$$\varphi = \text{Const.}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{Const.}$$

Предоставляем читателю самому доказать, что это будет система кругов с центрами по оси X (рис. 107).

Для линий потоков имеем

$$\psi = \text{Const.}; \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = \text{Const.}$$

Это тоже будут круги, потому что $(\alpha_1 - \alpha_2)$ есть угол при вершине P треугольника, образованного из сторон r_1, r_2 и $2d$ (рис. 108);

при движении точки P по кругу этот угол будет оставаться постоянным.

Обе системы кругов ортогональны друг к другу (рис. 108). Советуем читателю сравнить это плоское поле двух заряженных линий с полем двух полюсов в пространстве (стр. 113, **97**).

Если, наоборот, $\psi = \text{Const.}$ примем за эквипотенциальные линии, а $\varphi = \text{Const.}$ за линии потока, то будем иметь поле двух одинаковых вихревых нитей, отстоящих друг от друга на расстоянии $2d$; один из этих вихрей направлен по $+Z$, другой по $-Z$ (ср. стр. 142, **113**).

Приведенных примеров мы считаем достаточным для того, чтобы показать применение теории функций комплексного переменного к теории плоских полей. В гидродинамике, в теории упругости, в электромагнетизме и т. д. мы еще встретимся с подобными применениями.

Для черчения плоских полей может быть применен также способ Максвелла (**97**).

5. ПЕРЕМЕННОЕ ПОЛЕ.

124. Поле плоской волны. Когда какое-либо поле — скалярное или векторное — меняется со временем, то все входящие в наши формулы величины будут не только функциями координат, но еще и функциями времени.

Изменения полей со временем могут быть обусловлены очень разнообразными причинами и могут быть сами очень разнообразны. Наиболее важный в физике случай переменного поля представляет собою явление распространения волн.

Мы начнем с изучения плоской волны.

Предположим, что нам дано переменное поле какого-либо скаляра φ, значение которого не зависит от координат y и z, а зависит только от координаты x и еще от времени t. Следовательно, для любой плоскости, параллельной плоскости YZ, значения φ будут те же, что и для точки x, $y=0$, $z=0$; все эти плоскости будут служить *эквипотенциальными* поверхностями нашего поля.

Далее предположим, что зависимость потенциала φ от x и t может быть выражена некоторою функцией

$$\varphi = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

где c — постоянная величина.

Форма этой функции может быть любая, но независимые переменные должны входить в нее только в виде комбинации

$$s = t - \frac{x}{c}.$$

Разберем свойства этого поля.

Из выражения для s мы видим, что *различным* значениям t_1 и t_2 и, соответственно, *различным* x_1 и x_2 могут соответствовать одинаковые значения s. Для этого необходимо только, чтобы

$$s = t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}$$

или чтобы

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c.$$

Это означает, что тот же самый потенциал φ, который в некоторое время t_1 был прежде в точке x_1, оказался затем во время t_2 в точке x_2. Дело происходит так, как будто потенциал φ прошел длину $(x_2 - x_1)$ за время $(t_2 - t_1)$ и двигался с равномерною скоростью c по оси $+X$.

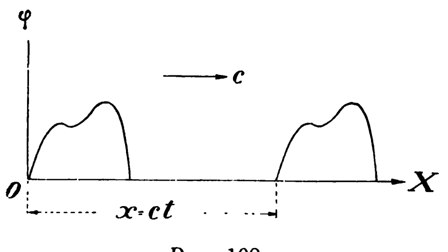


Рис. 109.

Так как то же самое будет происходить во всех точках, и потенциалы всех точек будут двигаться с одною и тою же скоростью c, то мы можем сказать, что все наше поле скалара φ, не изменяя своей формы, движется по оси X с равномерною скоростью c (см. рис. 109).

Если бы мы взяли функцию

$$f\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

то она изображала бы поле тоже неизменной формы, но движущееся со скоростью c по обратному направлению, т.-е. параллельно оси $-X$.

125. Распространение гармонических колебаний. Большею частью в теоретической физике функция $f(s)$ бывает периодическою, как, например, синус или косинус.

Положим

$$\varphi = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

В *каждой точке* x_1 этого поля φ будет меняться со временем по закону

$$\varphi = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_1}{c}\right).$$

Это будут гармонические колебания с одинаковой для всех точек поля амплитудой A и одинаковым для всех точек поля периодом T. Только фаза колебаний будет для различных точек поля разная, потому что в sin входит величина

$$\alpha = \frac{2\pi}{Tc} x.$$

Но так как синус имеет период 2π, то и фазы будут повторяться при переходе α через 2π, т.-е. при переходе вдоль оси X на расстояние

$$x = Tc = \lambda.$$

Как известно, это расстояние λ называется *длиною волны.*

В каждый *момент времени* t_1 распределение потенциала вдоль оси X можно изобразить синусоидою

$$\varphi = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t_1 - \frac{x}{c}\right).$$

В момент времени $t_1 + \tau$ мы получим опять синусоиду

$$\varphi = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t_1 + \tau - \frac{x}{c}\right).$$

Если здесь положить

$$\tau = \frac{\xi}{c},$$

то получим

$$\varphi = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t_1 - \frac{x - \xi}{c}\right).$$

Но это та же синусоида, только сдвинутая по оси $+X$ на длину ξ. Вообще, как мы уже сказали, все наше поле движется вдоль оси $+X$ со скоростью c.

126. Дифференциальные уравнения плоской волны. Если функцию

$$\varphi = f\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$$

продифференцировать по t и по x, то легко видеть, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mp \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Если продифференцировать еще раз, то для обеих волн — и вдоль $+X$, и вдоль $-X$ — получим одно и то же дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Это уравнение нам встретится в теории колебаний струн. Оно имеет большое историческое значение, потому что на нем вырабатывались основные методы решений вообще линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Мы теперь уже знаем два решения этого уравнения и можем написать

$$\varphi = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + F\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Если c постоянно, то это решение можно представить и таким образом:

$$\varphi = f(x - ct) + F(x + ct).$$

Это будет представлять две волны, идущие с одинаковыми скоростями навстречу друг другу. Обе функции f и F (форма волн) могут быть произвольными, и их форма определяется добавочными условиями задачи, а именно — условиями для какого-либо определенного момента времени и условиями на границах поля.

Легко также убедиться подстановкой, что не только функции f и F представляют собою решения нашего дифференциального уравнения, но и любые производные этих функций по x и по t.

Так как наше дифференциальное уравнение линейно, то сумма нескольких решений с произвольными коэффициентами будет тоже решение этого уравнения. Составляя подобные суммы, легко подобрать их так, чтобы удовлетворить и добавочным пограничным или иным условиям.

Примеры подобных приемов мы приведем в своем месте.

127. Сферическая волна. Теперь перейдем к рассмотрению более общего случая и предположим, что из центра координат O расходятся волны не только по оси X, но и по всем радиусам r во все стороны одинаково. Точка O служит, таким образом, *источником* волн нашего *переменного* поля.

Для источника e в точке O *постоянного* поля мы положили бы потенциал в форме

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

Аналогично с этим положим для нашего поля

$$\varphi = \frac{f\left(t \mp \frac{r}{c}\right)}{r}$$

или

$$\varphi = \frac{f(r \mp ct)}{r}.$$

После того, что мы сказали о формулах для плоской волны, смысл написанных здесь формул не требует особых пояснений. Потенциалы φ будут распространяться из точки O по радиусам во все стороны (или со всех сторон в точку O) с постоянною скоростью c. Эквипотенциальными поверхностями будут в данном случае сферические поверхности с центрами в начале координат. Существенное отличие от плоской волны заключается в том, что одновременно с удалением от источника потенциалы сферической волны будут убывать, потому что φ обратно пропорционально r. Но совершенно то же мы имели и в неизменном потенциальном поле.

Определим, чему равняется в данном случае выражение $\nabla^2\varphi$, которое по уравнению Лапласа равно нулю в постоянном поле вне источников. Так как φ зависит только от величины и не зави-

сит от направления радиуса-вектора, то для выражения $\nabla^2\varphi$ мы можем написать (стр. 85, **81**)

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} f\left(t \mp \frac{r}{c}\right).$$

Но аналогично с плоской волной, где у нас было x вместо r, мы имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

а так как r не зависит от t, и $f = r\varphi$, то

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

и, следовательно,

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Если волна плоская и производные по y и z равны нулю, то мы опять получаем уравнения параграфа 126, как частный случай.

Если поле постоянно, то производные по времени равны нулю, и мы получаем тоже как частный случай уравнение Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

Итак, мы приходим к заключению, что в *переменном* поле, в котором потенциалы распространяются из отдельных источников во все стороны со скоростью c, поле вне источников удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение носит название уравнения волн.

128. Запаздывающие потенциалы. Положим, что нам дано поле источников с плотностью ρ, которое меняется со временем,

$$\rho = f(x', y', z', t).$$

Если бы поле было постоянное, то мы могли бы вычислить потенциал в точке $P(x, y, z)$ по формуле

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r}\, do,$$

где r есть расстояние точки P (x, y, z) от тех точек Q (x', y', z') поля, где находятся источники ρ; так что

$$(PQ)^2 = r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Но если поле не постоянно и потенциалы распространяются не моментально, а с некоторою скоростью c, одинаковою для всех направлений, то в точку P, отстоящую от Q на расстояние r, потенциал придет с запозданием на время

$$t' = \frac{r}{c};$$

поэтому при вычислении потенциала φ в точке P для времени t нам нужно принимать во внимание не ту плотность источников, которая имеет место в данный момент времени t, а ту, которая была раньше, а именно в моменты времени $t - t'$. Заметим, что для каждой точки Q время t' будет различное, потому что t' зависит от расстояния r; именно, оно равно

$$\frac{PQ}{c} = \frac{r}{c}.$$

Обозначим через

$$\bar{\rho} = f(x', y', z', t - t').$$

Тогда запаздывающий потенциал выразится у нас формулою

$$\varphi = \int \frac{\bar{\rho}}{r}\, do.$$

Точно также запаздывающий потенциал поверхностных источников плотностью σ будет

$$\varphi = \int \frac{\bar{\sigma}}{r}\, dS.$$

Далее, потенциал биполя, как мы знаем, состоит из двух потенциалов полюсов $\pm e$, сдвинутых друг относительно друга на некоторую длину dl. Для запаздывающего потенциала двух полюсов мы должны написать

$$\frac{\bar{e}_1}{r_1} - \frac{\bar{e}_2}{r_2}.$$

В обыкновенных потенциалах $+e$ и $-e$ постоянны и равны друг другу, но в переменном поле и при запаздывающих потенциалах обе величины $\bar{e}$ будут разные, потому что они зависят от r:

$$\bar{e}_1 = f\left(t - \frac{r_1}{c}\right),$$

$$\bar{e}_2 = f\left(t - \frac{r_2}{c}\right).$$

Поэтому для биполя при беспредельном уменьшении dl мы получим (ср. стр. 94, **87**) потенциал

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{e}}{r}\right)\cos(lr) = -\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\bar{e}}{r}\right) = \nabla_p \frac{\bar{e}}{r}.$$

Если нам дан поляризованный слой, где все биполи направлены по нормали и их поверхностная плотность равна η, то запаздывающий потенциал такого двойного слоя будет

$$\varphi = -\int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\bar{\eta}}{r}\right) dS.$$

Почти все, что мы говорили раньше об обыкновенных потенциалах, можно повторить и для запаздывающих потенциалов, если только ввести влияние запаздывания. Как прежде, так и здесь прерывность градиента или потенциала в поле (стр. 100, **92**) у какой-либо поверхности можно для вычислений заменить ординарным или двойным слоем и т. д. и т. д.

Наконец, если поле, в котором скорость распространения явлений равна c, содержит вихри и притом меняющиеся со временем, то мы можем ввести вспомогательную величину, вектор-потенциал $\mathbf{A}$, который тоже будет запаздывающий. Поэтому, если дана плотность вихрей

$$\mathbf{w} \text{ как функция } f(x', y', z', t),$$

то в выражении вектора-потенциала (стр. 125, **102**) мы должны подставить

$$\bar{\mathbf{w}} \text{ как функцию } f(x', y', z', t - t').$$

129. Дифференциальное уравнение волн. Запаздывающие потенциалы уже не будут удовлетворять уравнению Лапласа-Пуассона, но имеют свое особое дифференциальное уравнение, которое носит название *уравнения волн*, потому что встречается главным образом в теории распространения волн всякого рода, т.-е. в акустике и в оптике.

Для того, чтобы вывести это уравнение, мы поступим следующим образом.

Окружим точку P, для которой мы ищем значение потенциала при данных источниках ρ, небольшою замкнутою поверхностью и разделим потенциал φ в этой точке на две части:

$$\varphi = \varphi_i + \varphi_a.$$

При чем φ_i будет потенциал от всех источников, находящихся внутри проведенной нами поверхности, а φ_a — потенциал от наружных источников.

Для внутренних источников, вследствие бесконечно малой величины всех расстояний r, запаздывание потенциала будет тоже бесконечно мало, а потому запаздывающий потенциал будет равен обыкновенному незапаздывающему потенциалу, и мы можем написать для него уравнение Лапласа-Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_i = -4\pi\rho\,(x', y', z', t).$$

Для наружных источников, т.-е. для вычисления φ_a, мы можем сделать другое упрощение. Каждый элементарный объем do мы будем считать настолько малым, что в его пределах расстояние r можно считать постоянным. Поэтому наружные источники будут эквивалентны отдельным точкам, испускающим из себя сферические волны, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе. Наша точка P находится вне этих источников, а потому для нее мы можем написать уравнение

$$\nabla^2\varphi_a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_a = 0.$$

Складывая оба уравнения — и для наружных и для внутренних источников, — вместе, получаем для всего поля

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\,(x', y', z', t),$$

уравнение, аналогичное уравнению Пуассона (стр. 78, **76**). Решение этого уравнения при данном поле ρ будет

$$\varphi = \int \frac{\rho(x', y', z', t - t')}{r} do.$$

Если поле постоянное, т.-е. не зависит от времени, или если оно и зависит от времени, но зато скорость распространения бесконечно велика, $c = \infty$, и все изменения поля распространяются во все стороны и на любые расстояния мгновенно, то написанное выше уравнение обращается в известное нам уравнение Пуассона, а его решение — в обыкновенный незапаздывающий потенциал.

130. Принцип Гюйгенса. В предыдущем параграфе мы показали, каким образом вычисляются запаздывающие потенциалы, если даны источники во всем бесконечном поле. Проведем в этом поле какую-либо замкнутую поверхность и предположим, что внутри этой поверхности нет источников. Спрашивается теперь — нельзя ли заменить наружные источники некоторыми фиктивными источниками, распределенными по проведенной нами поверхности, и притом так, чтобы поле внутри поверхности можно было вычислять не по действительным, а по этим фиктивным источникам.

Аналогичную задачу мы уже решали в теории незапаздывающих потенциалов и нашли (стр. 102, **92**), что потенциал φ_0 в какой-либо точке внутри поверхности можно определить, если вместо наружного поля нам будут даны потенциалы и нормальные составляющие их градиентов на пограничной поверхности S. Вычисление φ_0 делается по формуле

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi} \oint \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) dS,$$

где dn берется по нормали к поверхности S.

Первый член правой части представляет собою потенциал поверхностных источников с плотностью

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{dn},$$

а второй член правой части равен потенциалу двойного слоя с поверхностною плотностью биполей

$$\eta = \frac{1}{4n} \varphi.$$

Для запаздывающих потенциалов эту формулу придется несколько изменить. Но мы не будем приводить здесь подробности довольно сложных вычислений Кирхгофа и Фохта, а перейдем прямо к результату их выводов следующими простыми рассуждениями.

Для того, чтобы в написанной выше формуле принять в расчет запаздывание потенциалов, нам необходимо в первом члене заменить t через $t-t'$. Это мы выразим в формуле горизонтальной чертой над поверхностною плотностью:

$$\bar{\sigma}=-\left(\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dn}\right)_{t-t'}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\overline{d\varphi}}{dn}\right).$$

Второй член, как мы сказали, представляет собою потенциал двойного слоя биполей и, следовательно, состоит из двух потенциалов: одного от положительных источников и другого от отрицательных источников, сдвинутых друг относительно друга и находящихся от точки P на разных расстояниях. Запаздывающий потенциал обоих этих поверхностных источников будет (см. стр. 166, **128**)

$$\varphi_0=\int\frac{d}{dn}\left(\frac{\overline{\varphi}}{r}\right)dS.$$

Итак, для запаздывающего потенциала в точке P мы получаем выражение

$$\varphi_0=-\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\overline{d\varphi}}{dn}\right)-\frac{d}{dn}\left(\frac{\overline{\varphi}}{r}\right)\right)dS.$$

В этой формуле, установленной впервые Кирхгофом, принцип Гюйгенса получает свое количественное выражение.

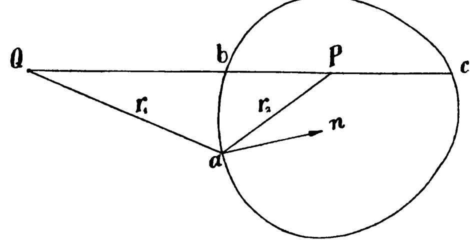


Рис. 110.

Здесь запаздывающий потенциал какой-либо точки φ_0 внутри ограниченного нами объема, где нет источников, выражен через потенциалы на пограничной поверхности.

131. Пример. Для того, чтобы выводы предыдущего параграфа приобрели бо́льшую наглядность, представим себе, что

в точке Q (рис. 110) помещен источник, совершающий гармонические колебания

$$e = A \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

где T — период колебаний.

В точке P мы будем иметь запаздывающий потенциал

$$\varphi_0 = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right),$$

где $\lambda = cT$ будет путь, пройденный волной за время одного колебания, т.-е. длина волны.

Проведем вокруг точки P какую-либо замкнутую поверхность abc и на основании принципа Гюйгенса определим для нее φ_0. Для этого нам необходимо предварительно определить величину фиктивных источников на этой поверхности.

В какой-либо точке a этой поверхности на расстоянии r_1 от источника Q потенциал будет

$$\varphi = \frac{A}{r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = \frac{A}{r_1} \sin \alpha.$$

Угол α мы ввели для краткости.

Нормальная к поверхности составляющая градиента будет

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} \cos (nr_1) = \left(-\frac{A \sin \alpha}{r_1{}^2} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{A \cos \alpha}{r_1}\right) \cos (nr_1).$$

Разделив это на 4π, получим поверхностную плотность фиктивных источников. Для определения потенциала в точке P надо разделить это на r_2 и ввести запаздывание $\frac{r_2}{c}$. Обыкновенно длина волны λ бывает гораздо меньше расстояния r_1, а потому первым членом этой формулы можно пренебречь и для точки P написать:

$$\varphi'_0 = \frac{A}{2\lambda} \oint \frac{1}{r_1 r_2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{\lambda}\right) \cos (nr_1)\, dS.$$

Для того, чтобы получить потенциал двойного слоя, необходимо *сперва* составить запаздывающий в точку P потенциал источников

$$\frac{\overline{\varphi}}{r_2} = \frac{A}{r_1 r_2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) = \frac{A}{r_1 r_2} \sin \beta,$$

а затем продифференцировать его, чтобы иметь потенциал двойного слоя

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\left(\frac{\overline{\varphi}}{r_2}\right) \cos (nr_2) = \left(-\frac{A \sin \beta}{r_1 r_2^2} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{A \cos \beta}{r_1 r_2}\right) \cos (nr_2).$$

Если опять первым членом пренебречь, предполагая, что r_2 тоже велико в сравнении с λ, то для потенциала двойного слоя получим

$$\varphi''_0 = -\frac{A}{2\lambda} \oint \frac{1}{r_1 r_2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{\lambda}\right) \cos (nr_2)\, dS.$$

Оба интеграла вместе дают:

$$\varphi_0 = \frac{A}{2\lambda} \oint \frac{1}{r_1 r_2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{\lambda}\right) [\cos (nr_1) - \cos (nr_2)]\, dS.$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если наша поверхность непроницаема для волн источника Q, и мы сделаем у точки b (рис. 110) небольшое отверстие dS, то в пределах этого отверстия r_1 и r_2 будут направлены противоположно друг к другу, и

$$\cos (nr_1) = -\cos (nr_2) = \cos (nr),$$

$$\cos (nr_1) - \cos (nr_2) = 2 \cos (nr),$$

$$r_1 + r_2 = r,$$

и для точки P мы получим

$$d\varphi_0 = \frac{A}{\lambda} \frac{\cos (nr)}{r_1 r_2} dS \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right).$$

Между тем, можно было бы ожидать *синусообразных* колебаний, как в источнике Q. Следовательно, наш фиктивный источник отстает от настоящего источника по фазе на 90°.

Далее, если сделать отверстие не в точке b, а в противоположной точке c, тогда оба радиуса совпадают по направлению, и

$$\cos(nr_1) = \cos(nr_2),$$

$$\cos(nr_1) - \cos(nr_2) = 0.$$

В таком случае и потенциал в точке P будет равен нулю.

Но этого и следовало ожидать, потому что, если волна идет по направлению $+r_1$, то точка P вследствие непроницаемости поверхности остается незатронутою, как бы в тени; волна не может из c итти *назад*.

Примеры применения принципа Гюйгенса мы встретим в теории диффракции волн.

132. Движение точки в переменном поле. Перейдем теперь к более общему случаю переменного поля, меняющегося со временем по любому закону. Здесь нам важно рассмотреть, как изменяется поле для точки, которая *сама движется* в этом поле, и какова быстрота этого изменения.

Для какой-либо *неподвижной* точки поля P быстрота изменения скалара A или вектора $\mathbf{A}$, образующих поле, будет, очевидно, равна производной по времени

$$\frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Скалар может меняться только по величине, а вектор может менять и свое направление.

Мы обозначили эти изменения как *частные* производные (круглое ∂) по времени, желая этим выразить, что их нужно брать для *неподвижных* точек, т.-е. при *неизменных* x, y, z.

Если же точка сама движется в поле, то для нее скалар A и вектор $\mathbf{A}$ будут меняться от двух причин: во-первых, от того, что поле переменное, и еще и от того, что точка при своем движении будет попадать в различные точки поля с различными значениями скалара A и вектора $\mathbf{A}$. Эти последние изменения будут происходить тем быстрее, чем скорее точка движется. *Полное* изменение скалара или вектора, происходящее от обеих причин, — от изменения поля и от движения точки, — мы будем обозначать теми же буквами A и $\mathbf{A}$, только с точкою наверху: $\dot{A}$ и $\dot{\mathbf{A}}$.

Если точка движется в поле скаляра A, то для нее

$$\dot{A}=\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Но производные скаляра A по координатам представляют собою проекции *градиента* поля, а производные от координат по времени суть не что иное, как проекции *скорости* точки; поэтому мы можем написать наше уравнение в такой форме

$$\dot{A}=\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad})\right]A.$$

Если точка движется в векторном поле $\mathbf{A}$, то мы можем написать три таких же уравнения, как для скаляра A, для проекций вектора на оси X, Y, Z, или соединить их в одно векторное уравнение

$$\dot{\mathbf{A}}=\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad})\right]\mathbf{A}.$$

Второй член этого уравнения требует некоторых пояснений. Мы знаем (стр. 47, **46**; стр. 55, **55**), что при перемещении в поле по оси $\mathbf{s}$ на длину $d\mathbf{s}$ изменение вектора $\mathbf{A}$ в постоянном поле равно

$$d\mathbf{A}=(d\mathbf{s}\,.\,\nabla)\,\mathbf{A}.$$

Если длина $d\mathbf{s}$ пробегается точкою во время dt, т.-е. со скоростью $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{s}}{dt}$, то быстрота изменения вектора и по величине, и по направлению будет (в постоянном поле)

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\,.\,\nabla\right)\mathbf{A}=(\mathbf{v}\,.\,\nabla)\,\mathbf{A}=(\mathbf{v}\,.\,\mathrm{grad})\,\mathbf{A}.$$

Это и выражено у нас во втором члене вышенаписанного уравнения.

133. Движение поверхности в переменном поле. Представим себе некоторую поверхность S, ограниченную замкнутым контуром l. Поток вектора $\mathbf{A}$ сквозь эту поверхность может меняться со временем тоже от двух причин: во-первых, от изменения самого

поля и, во-вторых, от движения поверхности и ее контура. Первая причина дает в единицу времени изменения потока

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\int\frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial t}\,d\mathbf{S}.$$

Для подсчета действия *второй* причины сдвинем отдельные части контура l на длину $d\mathbf{s}$ (рис. 111). Вектор $d\mathbf{s}$ может для различных $d\mathbf{l}$ быть различным, так что весь контур может не только сдвинуться, но и изменить свою форму.

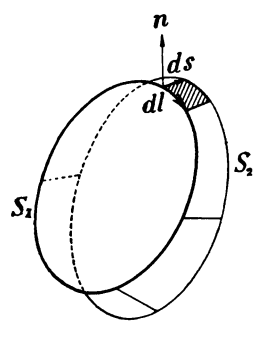


Рис. 111.

При таком сдвиге наша поверхность S_1 перейдет в новое положение S_2 и опишет в пространстве некоторый объем, который ограничен поверхностями S_1 и S_2 и, кроме того, той боковой поверхностью, которую описал контур l.

Применим к этому объему теорему Гаусса.

Потоки сквозь поверхности S_2 и S_1 будут (вытекание и втекание):

$$dN=\int_2 \mathbf{A}_n d\mathbf{S}-\int_1 \mathbf{A}_n d\mathbf{S}.$$

Элемент боковой поверхности можно представить в виде векторного произведения $[d\mathbf{l}\,.\,d\mathbf{s}]$, при чем нормаль этого элемента будет направлена наружу всего объема (рис. 110).

Поток вектора $\mathbf{A}$ сквозь *элемент* боковой поверхности будет

$$\mathbf{A}\,[d\mathbf{l}\,.\,d\mathbf{s}]=-d\mathbf{l}\,[\mathbf{A}\,.\,d\mathbf{s}],$$

а сквозь всю боковую поверхность получим

$$dN_b=-\oint d\mathbf{l}\,[\mathbf{A}\,.\,d\mathbf{s}],$$

где интеграл берется по всему сдвигаемому контуру.

Это выражение можно преобразовать по теореме Стокса:

$$dN_b=-\int \operatorname{curl}\,[\mathbf{A}\,.\,d\mathbf{s}]_n\,.\,d\mathbf{S}.$$

Элемент объема, описанный нашей поверхностью, выразится через элемент поверхности формулою

$$do = (d\mathbf{s} \,.\, d\mathbf{S}),$$

и теорема Гаусса, примененная к объему, описанному поверхностью S при ее сдвиге, даст нам

$$dN + dN_b = \int \operatorname{div} \mathbf{A} \,.\, do.$$

Отсюда получаем, что увеличение потока сквозь поверхность S, происходящее от движения этой поверхности в постоянном поле, будет

$$dN = \int (\operatorname{div} \mathbf{A} \,.\, d\mathbf{s}_n + \operatorname{curl} [\mathbf{A} \,.\, d\mathbf{s}]_n)\, d\mathbf{S}.$$

Разделив это на dt, положив $\frac{ds}{dt} = \mathbf{v}$ и прибавив местное изменение самого поля в единицу времени $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, получаем полное изменение потока при движении деформирующейся поверхности в переменном поле

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{A}_n \, d\mathbf{S} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial t} + \mathbf{v}_n \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{curl} [\mathbf{A} \,.\, \mathbf{v}]_n \right) d\mathbf{S}.$$

Если движется замкнутая поверхность, то последний член этой формулы равен нулю.

Подъинтегральное выражение правой части уравнения можно представить в несколько ином виде. Если развернуть последний член по стр. 56, **57**

$$\operatorname{curl} [\mathbf{A} \,.\, \mathbf{v}]_n = \mathbf{A}_n \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v}_n \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{v} \,.\, \operatorname{grad})\, \mathbf{A}_n - (\mathbf{A} \,.\, \operatorname{grad})\, \mathbf{v}_n,$$

то получим

$$\frac{dN}{dt} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}_n}{\partial t} + (\mathbf{v} \,.\, \operatorname{grad})\, \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n \,.\, \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{A} \,.\, \operatorname{grad})\, \mathbf{v}_n \right) d\mathbf{S}.$$

Первые два члена одинаковы с изменением вектора $\mathbf{A}$ для движущейся точки, которое мы уже рассмотрели на стр. 173, **127**. Третий член означает увеличение потока вследствие увеличения площади, а последний — вследствие изменения ее ориентировки.

134. Движение неизменного скаляра в поле. Два скаляра в физике играют первенствующую роль: масса и энергия. Как масса, так и энергия могут перемещаться в переменном поле и при этом менять занимаемый ими объем и изменять свою плотность; но, несмотря на все эти изменения, общее их количество должно оставаться постоянным.

Выведем уравнение, выражающее закон этого постоянства.

Для наглядности представим себе опять поле движущейся жидкости, при чем примем плотность жидкости ρ переменною.

Поток массы жидкости сквозь какую-либо поверхность, проведенную мысленно в поле, будет

$$N = \int (\rho \mathbf{v})_n \, d\mathbf{S}.$$

И если эта поверхность замкнутая, то по теореме Гаусса (стр. 71, **70**)

$$N = \oint (\rho \mathbf{v})_n \, d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \, do.$$

Масса жидкости, находящейся внутри этого объема, равна

$$M = \int \rho \, do.$$

Если в данном объеме нет источников, то масса жидкости, вытекающей из поверхности данного объема в единицу времени, очевидно, равна уменьшению массы жидкости внутри данного объема в ту же единицу времени, т.-е.

$$N = -\frac{dM}{dt}$$

или

$$\oint \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \, do = -\frac{d}{dt} \int \rho \, do.$$

Это уравнение можно назвать *законом сохранения массы*.

Если выделенный нами объем при этом не меняется, то можно производную по времени отнести к плотности ρ

$$\oint \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \, do = -\int \frac{d\rho}{dt} \, do.$$

Применяя эту формулу к элементарному неизменному объему, получим так называемое *условие непрерывности движения жидкости*

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Переписывая это уравнение в декартовой прямоугольной системе координат, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Если ρ всегда и везде постоянно, как, например, в несжимаемой жидкости, то для тех точек, где нет источников,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

как это мы уже неоднократно видели.

В гидродинамике и аэродинамике эти уравнения играют большую роль.

Аналогичное уравнение можно написать и для закона сохранения энергии и вообще для всякого скаляра, который перемещается в поле, сохраняя свою величину.

ГЛАВА III.

ТЕНЗОРЫ.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТЕНЗОРОВ.

135. Деформация. Представим себе твердое тело, которое равномерно расширяется от повышения температуры. Мы можем описать это явление количественно, сказав, что любое расстояние $\mathbf{A}$ между двумя точками этого тела превращается в расстояние $\mathbf{B}$, при чем

$$\mathbf{B} = a\mathbf{A}.$$

В разбираемом случае можно под $\mathbf{A}$ подразумевать не какой-либо определенный вектор, а вообще любой радиус-вектор $\mathbf{r}$.

Выберем какую-нибудь точку тела за начало координат; тогда проведенные из начала радиусы-векторы одинаковой величины, но разных направлений образуют своими концами шаровую поверхность,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

и вектор

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{r}$$

тоже образует шаровую поверхность, только в a раз большего радиуса:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ar)^2,$$

или

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = r^2.$$

При таком расширении тела радиусы-векторы не меняют своего направления ($\mathbf{r}'$ одного направления с $\mathbf{r}$), и *форма* тела не изменяется; только *размеры* тела увеличиваются равномерно во все стороны.

Несколько сложнее будет происходить дело в кристаллических телах, где даже при равномерном нагревании расширение по различным направлениям происходит различно. В этом случае не только величина, но и форма тела будет меняться.

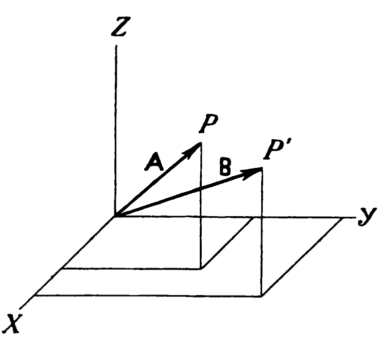


Рис. 112.

Обыкновенно, в кристалле имеются три главных *направления*, три *главных оси расширения* X, Y, Z (рис. 112), взаимно перпендикулярные, для которых расширение характеризуется тремя числами a, b, c (коэффициенты расширения).

При таком расширении вектор **A** превращается в вектор **B** по уравнениям

$$B_x = aA_x, \qquad B_y = bA_y, \qquad B_z = cA_z.$$

Этот новый вектор **B** будет отличаться от **A** не только по величине, но, вообще говоря, и по направлению, как в этом легко убедиться простым построением (см. рис. 112).

Если толковать наше уравнение не как соотношение между *определенными* векторами **A** и **B**, а представить себе целую *систему* радиусов-векторов $\mathbf{r}$, проведенных из начала координат во все стороны, и для каждого из них искать вектор $\mathbf{r}'$ по вышеописанным трем уравнениям, тогда наше поле векторов $\mathbf{r}$ превратится в поле векторов $\mathbf{r}'$.

Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ будут, вообще, разных величин и разных направлений. Только те радиусы-векторы, которые до расширения были направлены по осям X, Y, Z, не изменят своего направления.

Это можно видеть из построения, но легко доказать и аналитически. Действительно, если, например, радиус-вектор $\mathbf{r}$ имеет проекции x, 0, 0, то после расширения его проекции будут ax, 0, 0, т.-е. он остался в той же оси X.

Вообще же для любого радиуса-вектора его новые проекции x', y', z' выразятся через старые x, y, z таким образом:

$$x' = ax, \qquad y' = by, \qquad z' = cz,$$

и, наоборот, старые проекции выразятся через новые так:

$$x = \frac{x'}{a}, \qquad y = \frac{y'}{b}, \qquad z = \frac{z'}{c}.$$

Если *до* расширения радиусы-векторы $\mathbf{r} = 1$ образовывали шаровую поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

то после расширения мы получим

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2 = 1,$$

т.-е. шар превратился в эллипсоид с главными полуосями a, b, c.

Направления этих осей совпадают с X, Y, Z.

Точно так же и наоборот, если *после* расширения мы получили шар радиуса $\mathbf{r}' = 1$

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1,$$

то до расширения он был эллипсоидом

$$(ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 = 1$$

с главными полуосями $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ того же направления X, Y, Z.

Вышеприведенные формулы, выражающие соотношение между проекциями двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, пишут обыкновенно для краткости так:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \, . \, \mathbf{A},$$

или

$$\mathbf{A} = (\mathbf{T})^{-1} \, \mathbf{B}.$$

Символ $\mathbf{T}$ в рассмотренном нами случае определяется, во-первых, системою координат (по главным осям расширения) и, во-вторых, тремя числами a, b, c.

136. Эллипсоид деформации. Тензорное соотношение между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно иллюстрировать геометрически следующим образом.

Составим скалярное произведение $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}'$

$$(\mathbf{r} \, . \, \mathbf{r}') = rr' \cos(\mathbf{r}\mathbf{r}') = xx' + yy' + zz'.$$

Приравниваем этот скаляр какой-либо постоянной величине, например, единице; тогда получим:

$$(\mathbf{rr}') - 1 = 0.$$

Если в этом уравнении выразить x' через x и т. д. или, наоборот выразить x через x' и т. д., то получим уравнения двух поверхностей второго порядка

$$2\Phi(\mathbf{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0,$$

$$2\Phi(\mathbf{r}') = \frac{(x')^2}{a} + \frac{(y')^2}{b} + \frac{(z')^2}{c} - 1 = 0.$$

Коэффициент 2 мы ввели, имея в виду дальнейшие применения этих уравнений; кстати, этот коэффициент может указывать, что функция 2Φ второго порядка.

Обе эти поверхности принято называть *тензорными эллипсоидами* или *эллипсоидами деформации*, хотя на самом деле при некоторых значениях a, b, c они могут оказаться и гиперболоидами и т. д.

Полученные нами здесь два новых эллипсоида отличаются от рассмотренных в предыдущем параграфе только величиною своих осей $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\sqrt{\frac{1}{b}}$, $\sqrt{\frac{1}{c}}$ и $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, но направление осей и центр у всех четырех эллипсоидов одинаковы.

Рассмотрим сначала эллипсоид

$$2\Phi(\mathbf{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0.$$

Если ввести сюда вектор нормали (ср. § 37, стр. 34)

$$n_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = ax, \qquad n_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = by, \qquad n_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = cz,$$

то получим

$$2\Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{nr}) - 1 = 0,$$

откуда видим, что

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}' = \mathbf{T}\cdot\mathbf{r}.$$

Следовательно, тензор вектора $\mathbf{r}$ имеет направление нормали к его тензорному эллипсоиду в точке $\mathbf{r}$, т. е. в точке с координатами x, y, z.

Если через эту точку $\mathbf{r}$ провести к тензорному эллипсоиду касательную плоскость, то длина перпендикуляра, опущенного из начала на эту плоскость, будет равна

$$p = r\cos(nr) = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_1).$$

Но единичный вектор по нормали, т.-е. $\mathbf{n}_1$, можно заменить на основании вышенаписанного уравнения через

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{n}}{r'},$$

а произведение $(\mathbf{rn}) = 1$ поэтому можем написать

$$p = \frac{1}{r'}(rn) = \frac{1}{r'}\cdot$$

Из этого мы видим, что тензорное соотношение

$$\mathbf{r}' = \mathbf{Tr}$$

с *геометрической* точки зрения означает следующее: если в тензорном эллипсоиде $2\Phi(\mathbf{r}) = 0$ провести из центра вектор $\mathbf{r}$ до точки пересечения его с поверхностью и в этой точке провести касательную плоскость, то перпендикуляр, опущенный из начала на эту плоскость, будет иметь направление $\mathbf{r}'$ и длину $\frac{1}{r'}\cdot$

Совершенно таким же путем можно доказать, что соотношение

$$\mathbf{r} = (\mathbf{T})^{-1}\mathbf{r}$$

означает, что в (обратном) тензорном эллипсоиде

$$2\Phi(\mathbf{r}') = 0$$

нормаль в конце любого радиуса-вектора $\mathbf{r}'$ будет иметь направление $\mathbf{r}$, а величина перпендикуляра, опущенного из начала на касательную в точке $\mathbf{r}'$ плоскость, будет равна $\frac{1}{r}\cdot$

Таким образом, геометрические соотношения между **r** и **r'** *взаимны*.

Мы можем ограничиться изображением этого соотношения на плоскости (не в пространстве).

Возьмем круг (рис. 113)

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

и примем, например:

$$\sqrt{a} = \frac{3}{4} r$$

и

$$\sqrt{b} = \frac{3}{5} r.$$

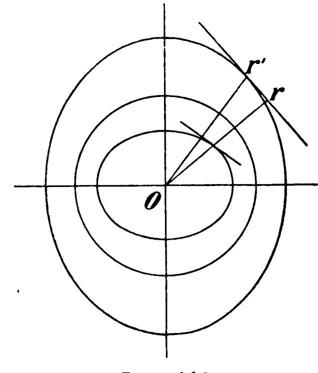


Рис. 113.

Внутри и снаружи этого круга начертим эллипсы тензоров **T** и $(\mathbf{T})^{-1}$

$$ax^2 + by^2 = 1,$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1.$$

Если теперь провести какой-либо радиус-вектор **r**, в точке пересечения его с *наружным* эллипсом провести касательную и опустить на эту касательную перпендикуляр из начала координат, то этот перпендикуляр даст нам направление вектора **r'**. Если же провести через точку пересечения вектора **r'** с *внутренним* эллипсом касательную, то она будет перпендикулярна к радиусу-вектору **r**.

Заметим, что подобные же геометрические соотношения мы имеем и в тех двух эллипсоидах, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе; но те эллипсоиды при применении вышеуказанных построений не дадут нам тензорного соотношения $\mathbf{r}' = \mathbf{T}\mathbf{r}$ с коэффициентами a, b, c, а дадут соотношение с коэффициентами a^2, b^2, c^2.

137. Тензор более общий. Рассмотренная нами деформация представляет собой частный случай *линейной зависимости* между составляющими по осям координат вектора **A** и составляющими вектора **B**. Если обобщить эту зависимость, оставляя ее линейной (т.-е. первой степени), то получим нижеследующее:

$$B_x = a_{11}A_x + a_{12}A_y + a_{13}A_z$$

$$B_y = a_{21}A_x + a_{22}A_y + a_{23}A_z$$

$$B_z = a_{31}A_x + a_{32}A_y + a_{33}A_z.$$

В этом более общем случае зависимость **B** от **A** определяется уже не тремя, а девятью коэффициентами вида

$$a_{ik}, \text{ где } i \text{ и } k = 1, 2, 3.$$

Совокупность этих девяти коэффициентов называется *тензором*, а каждая из величин a_{ik} называется *составляющею тензора*.

Наш тензор имеет, следовательно, *девять* составляющих, по три составляющих для каждой оси координат.

Вышенаписанные три уравнения соединяют для краткости в одно и пишут символически в виде произведения:

$$\mathbf{B} = \mathbf{TA}.$$

Само собою разумеется, что это символическое произведение получает определенный смысл только тогда, когда выбрана определенная система координат и когда даны все девять составляющих тензора.

Очень часто эти девять составляющих пишут в виде таблицы (так называемая *матрица*) подобно детерминантам

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ или} = |a_{ik}|, \text{ где } \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3.$$

Величины a_{11}, a_{22}, a_{33} называются *диагональными* составляющими или диагональными членами тензора **T**, а остальные — *боковыми* членами.

Заметим, что только одна диагональ тензора, а именно идущая слева направо вниз, имеет особо важное значение; другая — не играет подобной роли.

Но кроме того, тензорная матрица отличается от детерминантовой тем, что в ней нельзя заменять столбцы рядами, или наоборот, без изменения значения самого тензора.

В дальнейшем нам встретится необходимость вычислять детерминант тензорной матрицы. Однако следует помнить, что одному и тому же значению детерминанта могут соответствовать весьма различные тензоры.

В частном случае, когда все боковые члены тензора с различными i и k равны нулю, т.-е. когда детерминант его состоит только

из диагональных членов, тогда мы получаем разобранную нами выше линейную деформацию

$$a_{11}=a, \qquad a_{22}=b, \qquad a_{33}=c.$$

Еще более частный случай получаем, если, кроме того, еще все диагональные члены одинаковы. Тогда наш тензор превращается в скалар a, на который надо умножить вектор **A**, чтобы получить вектор **B**.

Наконец, если все диагональные члены равны единице, то получаем единичный тензор

$$\mathbf{T}_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

138. Обратный тензор. Из формул, выражающих **B** как линейную функцию **A**, мы легко можем получить формулы для зависимости **A** от **B**; для этого нужно только решить наши уравнения относительно A_x, A_y, A_z. Зависимость **A** от **B** тоже будет выражаться тензором, который называется обратным и обозначается $(\mathbf{T})^{-1}$.

$$A_x=b_{11}B_x+b_{12}B_y+b_{13}B_z$$

$$A_y=b_{21}B_x+b_{22}B_y+b_{23}B_z$$

$$A_z=b_{31}B_x+b_{32}B_y+b_{33}B_z,$$

$$(\mathbf{T})^{-1}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=|b_{ik}|.$$

Приняв во внимание правила решения линейных уравнений, легко видеть, что составляющие этого тензора будут представляться субдетерминантами тензора **T**, деленными на этот детерминант. Так, например,

$$b_{11}=\frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D\,|a|}$$

и т. д.

Вообще, обозначая субдетерминант знаком SD, можно написать

$$b_{ik}=\frac{SD(a_{ki})}{D\,|a|}.$$

Точно так же и для обратного перехода от b к a имеем подобные же соотношения

$$a_{ik} = \frac{SD(b_{ki})}{D\,|\,b\,|}.$$

Из этих выражений мы, между прочим, видим, что переходы от прямого тензора к обратному и обратно возможны только при условии, что их детерминанты не равны нулю.

139. Различные применения тензорных соотношений. На тензор **T** можно смотреть с различных точек зрения.

Во-первых, мы можем смотреть на него, как на математическую операцию, которую нужно провести над вектором **A**, чтобы получить вектор **B**, по формулам, данным в предыдущих параграфах,

Во-вторых, под **A** можно подразумевать не один определенный вектор, а все радиусы-векторы **r**, проведенные из начала координат во все стороны. В таком случае формула

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}\mathbf{r}$$

будет представлять линейное преобразование всего пространства, всего поля радиуса-вектора **r** в поле **r**$'$.

Это преобразование линейно и потому обладает следующими свойствами:

а) Прямые линии и плоскости остаются после преобразования прямыми линиями и плоскостями. Все поверхности хотя меняют, вообще говоря, свою форму и положение, но остаются той же степени и того же порядка, какого они были до преобразования.

б) Углы, образуемые плоскостями и линиями друг с другом, вообще говоря, меняются при преобразовании. Но, так как для всех параллельных векторов формулы преобразования остаются те же, то параллелизм плоскостей и линий сохраняется, несмотря на преобразования, неизменным.

В-третьих, на соотношение **T** можно смотреть, как на формулы преобразования линейных координат в другие линейные же, но, вообще говоря, с другим наклоном друг к другу. Об этом мы будем говорить подробнее в следующей главе.

140. Сумма и произведение тензоров. Символ **T** имеет некоторые свойства, аналогичные свойствам скалярного множителя. Так, например, если дан второй тензор при тех же координатах

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}'\mathbf{A},$$

то легко видеть, что

$$\mathbf{B}+\mathbf{B}'=\mathbf{T}\mathbf{A}+\mathbf{T}'\mathbf{A}=(\mathbf{T}+\mathbf{T}')\mathbf{A},$$

при чем новый тензор $(\mathbf{T}+\mathbf{T}')$ имеет составляющие, равные суммам соответствующих составляющих тензора $\mathbf{T}$ и тензора $\mathbf{T}'$.

Точно также верно уравнение

$$\mathbf{T}(\mathbf{A}+\mathbf{A}')=\mathbf{T}\mathbf{A}+\mathbf{T}\mathbf{A}'.$$

Предоставляем читателю самому в этом убедиться.

Далее, если к вектору $\mathbf{B}=\mathbf{T}_a\mathbf{A}$ снова применить операцию другого тензора $\mathbf{T}_b$, т.-е. написать

$$\mathbf{C}=\mathbf{T}_b\mathbf{B}=\mathbf{T}_b\mathbf{T}_a\mathbf{A}=\mathbf{T}_c\mathbf{A},$$

где

$$\mathbf{T}_a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{T}_b=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

то результирующий тензор

$$\mathbf{T}_c=\mathbf{T}_b\mathbf{T}_a$$

получится из произведений составляющих тензора $\mathbf{T}_b$ и тензора $\mathbf{T}_a$, подобно тому как перемножаются детерминанты, с тою, однако, разницею, что здесь значение столбцов и рядов не эквивалентно, и при перемножении нужно составлять суммы произведений рядов впереди стоящего тензора $\mathbf{T}_b$ на столбцы второго тензора $\mathbf{T}_a$.

Так, например, для результирующего вектора $\mathbf{C}$ мы получим

$$\begin{aligned} C_x = b_{11}B_x + b_{12}B_y + b_{13}B_z = {} & [b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}]A_x + \\ & + [b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32}]A_y + \\ & + [b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33}]A_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_y = b_{21}B_x + b_{22}B_y + b_{23}B_z = {} & [b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}b_{31}]A_x + \\ & + [b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}]A_y + \\ & + [b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33}]A_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_z = b_{31}B_x + b_{32}B_y + b_{33}B_z = {} & [b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31}]A_x + \\ & + [b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32}]A_y + \\ & + [b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33}]A_z. \end{aligned}$$

Вообще, если составляющие тензора $\mathbf{T}_c$ обозначить через c_{ik}, где индекс i относится к рядам, а k к столбцам, то можно написать

$$c_{ik} = b_{i1}a_{1k} + b_{i2}a_{2k} + b_{i3}a_{3k}.$$

Из этой формулы мы видим, что $\mathbf{T}_b\mathbf{T}_a$ не равно $\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b$, потому что во втором случае мы получили бы

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}.$$

141. Симметричный тензор. Мы не будем углубляться в *общую теорию* тензоров, отсылая интересующихся этим к специальным курсам, а перейдем к рассмотрению наиболее важных частных случаев.

Прежде всего рассмотрим так называемый *симметричный тензор*, у которого $a_{ik} = a_{ki}$, т.-е. у которого столбцы одинаковы с рядами; он симметричен относительно своей диагонали. В этом случае для определения тензора вместо девяти чисел достаточно шесть

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12} = a_{21},\ a_{23} = a_{32},\ a_{31} = a_{13}.$$

Сложение и умножение симметричных тензоров дает в результате опять симметричный тензор.

Если бы мы для общего *несимметричного* тензора составили скаларное произведение $\mathbf{A}$ на $\mathbf{TA}$, взяв за $\mathbf{A}$ радиус-вектор $\mathbf{r}$, то получили бы

$$(\mathbf{r}\,.\,\mathbf{Tr}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + (a_{31} + a_{13})zx.$$

Мы могли бы положить это произведение равным постоянной величине, например единице, и получили бы уравнение поверхности второго порядка. Однако эта поверхность не могла бы играть роль тензорного эллипсоида, который мы рассматривали в § **136**, стр. 181, и частные производные этой функции по координатам не дадут нам составляющих вектора $\mathbf{Tr}$. Кроме того, хотя каждому тензору и здесь соответствовал бы определенный эллипсоид, но по данному эллипсоиду нельзя было бы определить тензор по той простой причине, что у эллипсоида только шесть коэффициентов, а у тензора их девять.

Другое дело, если тензор симметричен; тогда для каждого тензора мы не только можем получить определенный эллипсоид

$$2\Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\,.\,\mathbf{Tr}) - 1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx - 1 = 0,$$

но и, наоборот, каждому данному эллипсоиду будет соответствовать тоже вполне определенный симметричный тензор.

Если мы теперь составим частные производные от $\Phi(\mathbf{r})$ по координатам, то получим составляющие вектора $\mathbf{r}'$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = r'_x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = r'_y$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = r'_z.$$

Следовательно, здесь в *симметричном* тензоре мы имеем совершенно такие же соотношения, как в рассмотренной нами выше *деформации*, и мы можем для всякого симметричного тензора установить теорему: если вектор $\mathbf{r}$ своим концом лежит на поверхности $2\Phi(\mathbf{r}) = 0$, то вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{Tr}$ (где $\mathbf{T}$ — какой-либо *симметричный* тензор) имеет направление нормали к этой поверхности в точке $\mathbf{r}$, а длина вектора $\mathbf{r}'$ равна обратной величине длины перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость, касательную в точке $\mathbf{r}$.

Разница между деформацией, рассмотренной нами раньше, и симметричным тензором, который мы изучаем теперь, состоит только в том, что прежде главные оси эллипсоида совпадали с осями координат, а теперь, когда a_{12}, a_{23} и a_{31} не равны нулю, этого совпадения уже нет.

Впрочем, мы всегда можем выбрать оси координат так, чтобы они были направлены по *главным* осям эллипсоида и превратить наш симметричный тензор в тензор более простого вида:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Итак, симметричный тензор вполне аналогичен деформации, а потому его иногда обозначают буквой $\mathbf{D}$.

Если мы напишем равенство

$$\mathbf{r}' = \mathbf{D}\mathbf{r}$$

и для тензора $\mathbf{D}$ дадим его эллипсоид деформации, то это уже вполне определяет соотношение между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и нормалью данного эллипсоида $\mathbf{r}'$, а потому это соотношение совершенно не зависит от того или иного выбора системы координат.

От выбора системы координат зависят только *составляющие* тензора a_{ik}.

Здесь мы имеем некоторую аналогию с векторами. Сам вектор, данный по величине и направлению, тоже не изменяется при перемене осей координат, только его составляющие по осям меняют свою величину.

Подобно тому, как вектор мы изображаем отрезком линии определенной величины и определенного направления, точно также и тензор мы можем изобразить эллипсоидом определенного соотношения между его главными осями и определенной их ориентировки.

Подобно тому, как в векторном поле каждой точке его приурочивается вектор, так и в тензорном поле каждой точке приурочивается эллипсоид, определенный и по величине осей, и по их направлению.

Примером такого тензорного поля может служить какой-нибудь неравномерно нагретый кристалл. Другим примером тензорного поля может служить согнутый внешними силами брусок, где распределение деформаций может быть очень разнообразно. Подобные тензорные поля нам встретятся в теории упругости.

142. Преобразование тензоров при перемене координат. Мы уже говорили выше, что составляющие тензора зависят от выбранной нами системы координат, а потому, при переходе от одной системы декартовых координат к другой, составляющие одного и того же тензора будут меняться, и нам необходимо знать формулы их преобразования.

Что касается до симметричного тензора, то его составляющие служат в то же время коэффициентами в уравнении тензорного эллипсоида, а потому при перемене осей они будут изменяться, как эти коэффициенты. Из аналитической геометрии известно, что коэффициенты в уравнениях второго порядка изменяются при перемене координат, как *квадраты* и *произведения* координат. По тем же законам будут преобразовываться и составляющие тензора.

Мы ограничимся здесь выводом формул преобразования тензорных составляющих только для *симметричного* тензора.

Формулы преобразования картезианских координат x, y, z в другие картезианские координаты ξ, η, ζ с тем же началом мы можем получить проще всего следующим путем. Написав векторное уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta},$$

проектируем его (ср. § 13, стр. 10) последовательно на все шесть осей координат.

Обозначая

$$\begin{array}{lll} \cos(X\Xi) = \alpha_1 & \cos(XH) = \alpha_2 & \cos(XZ) = \alpha_3 \\ \cos(Y\Xi) = \beta_1 & \cos(YH) = \beta_2 & \cos(YZ) = \beta_3 \\ \cos(Z\Xi) = \gamma_1 & \cos(ZH) = \gamma_2 & \cos(ZZ) = \gamma_3, \end{array}$$

получаем формулы преобразования координат

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \\ y &= \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \\ z &= \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta \\ \xi &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ \eta &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ \zeta &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Эти формулы имеют совершенно такой же вид, как изученные нами только что тензорные соотношения между двумя векторами.

Если мы обозначим радиус-вектор (т.-е. его составляющие) какой-либо точки в системе координат X, Y, Z через $\mathbf{r}$ и тот же радиус-вектор, но в другой системе координат Ξ, H, Z через ρ, то можем написать наши формулы в виде тензоров

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_k\rho; \quad \rho = (\mathbf{T}_k)^{-1}\mathbf{r};$$

только теперь значение этих формул иное: преобразуются не векторы, а координаты.

В рассматриваемом нами частном случае преобразования *декартовых* координат в другие тоже декартовы обратный тензор получается из прямого простою *перестановкою* (транспозиция) рядов

и столбцов, как это прямо видно из уравнений преобразования координат. Благодаря этому мы можем изобразить наше преобразование координат следующею, легко понятною схемою.

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

По той же схеме будет преобразовываться (т.-е. будет изменять свои составляющие по осям координат) любой вектор **A**.

Для того, чтобы узнать, как преобразуется симметричный тензор **D**, подставим формулы преобразования для x, y, z в уравнение $2\Phi(x, y, z) = 0$ и соберем коэффициенты при квадратах и произведениях новых переменных.

Тогда получим

$$2\Phi(\xi, \eta, \zeta) = b_{11}\xi^2 + b_{22}\eta^2 + b_{33}\zeta^2 + 2b_{12}\xi\eta + 2b_{23}\eta\zeta + 2b_{31}\zeta\xi - 1,$$

при чем

$$b_{11} = \alpha_1^2 a_{11} + \beta_1^2 a_{22} + \gamma_1^2 a_{33} + 2\alpha_1\beta_1 a_{12} + 2\beta_1\gamma_1 a_{23} + 2\gamma_1\alpha_1 a_{31}$$

$$b_{22} = \alpha_2^2 a_{11} + \beta_2^2 a_{22} + \gamma_2^2 a_{33} + 2\alpha_2\beta_2 a_{12} + 2\beta_2\gamma_2 a_{23} + 2\gamma_2\alpha_2 a_{31}$$

$$b_{33} = \alpha_3^2 a_{11} + \beta_3^2 a_{22} + \gamma_3^2 a_{33} + 2\alpha_3\beta_3 a_{12} + 2\beta_3\gamma_3 a_{23} + 2\gamma_3\alpha_3 a_{31}$$

$$b_{12} = \alpha_1\alpha_2 a_{11} + \beta_1\beta_2 a_{22} + \gamma_1\gamma_2 a_{33} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)a_{12} + \\ + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)a_{23} + (\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1)a_{31}$$

$$\beta_{23} = \alpha_2\alpha_3 a_{11} + \beta_2\beta_3 a_{22} + \gamma_2\gamma_3 a_{33} + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)a_{12} + \\ + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)a_{23} + (\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2)a_{31}$$

$$b_{31} = \alpha_3\alpha_1 a_{11} + \beta_3\beta_1 a_{22} + \gamma_3\gamma_1 a_{33} + (\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3)a_{12} + \\ + (\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3)a_{23} + (\gamma_3\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3)a_{31}.$$

Легко проверить, что

$$S_1 = b_{11} + b_{22} + b_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

т.-е. что сумма диагональных членов тензора не меняется при перемене координат. Эта сумма называется первой *инвариантой* преобразования.

Имеются еще две инварианты

$$S_2 = b_{22}b_{33} + b_{33}b_{11} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - b_{23}^2 - b_{31}^2$$

$$S_3 = -b_{11}b_{22}b_{33} - 2b_{12}b_{23}b_{31} + b_{11}b_{23}^2 + b_{22}b_{31}^2 + b_{33}b_{12}^2.$$

Впрочем эти последние две инварианты нам встречаться не будут. Они известны также из аналитической геометрии поверхностей второго порядка.

Написанные выше формулы преобразования симметричного тензора тоже легко запоминаются, благодаря своей симметрии.

Итак, мы действительно видим, что в отличие от вектора, которого составляющие преобразуются, как первые степени координат, составляющие тензора преобразуются, как квадраты и произведения координат. В то время как в формулах преобразования вектора входят первые степени косинусов углов наклонения осей друг к другу, в тензоре входят квадраты и произведения этих косинусов. Это обстоятельство находится в связи с тем, что вектор имеет, так сказать, *одностороннее направление* у точки O (рис. 114) и при перемене угла на π меняет свой знак (как $\cos\alpha$). Между тем, оси тензорного эллипсоида имеют *двустороннее* направление (как и всякая линия) и при перемене угла на 180° своего знака не меняют (как $\cos^2\alpha$).

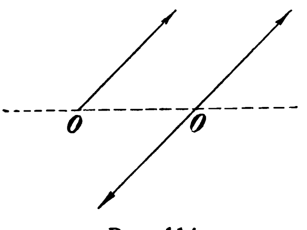


Рис. 114.

Смещение точки есть вектор, а напряжение в упругом стержне, например при его растяжении, есть тензор. При перемене знака вектора меняется и направление смещения, между тем как при перемене знака тензора растяжение превращается в сжатие, но *линия* напряжения своего направления не меняет.

143. Антисимметричный тензор. Тензор, в котором члены, не стоящие по диагонали, попарно равны и противоположны, т.-е.

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

называется *антисимметричным*, или *антиметричным*.

Примером антисимметричного тензора может служить векторное произведение двух векторов

$$\mathbf{v} = [\mathbf{ur}],$$

которое можно развернуть и в декартовых координатах написать так

$$\begin{aligned} v_x &= +0 & -u_z y & \quad +u_y z \\ v_y &= +u_z x & +0 & \quad -u_x z \\ v_z &= -u_y x & +u_x y & \quad +0. \end{aligned}$$

Следовательно, на векторное произведение мы можем смотреть как на особый тензор, составляющие которого можно расположить в обычной схеме тензоров таким образом:

$$\mathbf{T}_{asym} = \begin{vmatrix} 0 & -u_z & +u_y \\ +u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & +u_x & 0 \end{vmatrix} = [\mathbf{u}.$$

Мы будем иногда обозначать подобный тензор знаком $[\mathbf{u}$, который взят от левой половины векторного произведения $[\mathbf{ur}]$.

144. Разложение тензора. Если сложить два тензора, один симметричный $\mathbf{D}$ и другой антисимметричный $[\mathbf{u}$, то получим несимметричный тензор

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} + [\mathbf{u}.$$

Наоборот, всегда можно любой тензор $\mathbf{T}$ считать составленным из двух тензоров — симметричного и антисимметричного.

Действительно:

$$T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}+a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}+a_{13}}{2} & \frac{a_{32}+a_{23}}{2} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} & \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 & \frac{a_{23}-a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}-a_{13}}{2} & \frac{a_{32}-a_{23}}{2} & 0 \end{vmatrix}.$$

При таком разложении не нужно, однако, забывать, что *сумма* этих двух тензоров означает следующее: когда дан вектор **r**, то над ним нужно произвести операцию **D** и над ним же независимо от первой операции произвести операцию [u; затем полученные два вектора сложить геометрически. Результат этого сложения и будет вектор **Tr**.

Совершенно другое будет, если мы над вектором **r** *сперва* произведем операцию **D**, а затем над этим *результатом* произведем вторую операцию [u; в результате мы получим не сумму, а *произведение* тензоров.

В то время как сумма тензоров не зависит от порядка сложения, в произведении перестановка тензоров, вообще говоря, изменяет результат операции (стр. 186, **140**).

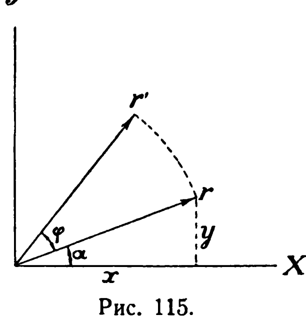


Рис. 115.

145. Версор или ротор. Поставим себе задачу найти такой тензор, который, не изменяя длины векторов **r**, поворачивал бы все поле вокруг некоторой оси **s** на угол φ.

Рассмотрим сперва частный случай, когда ось **s** совпадает с осью координат Z. В этом случае легко найти по рис. 115, что:

$$r'_x = r\cos(\alpha + \varphi) = \cos\varphi . x - \sin\varphi . y$$

$$r'_y = r\sin(\alpha + \varphi) = \sin\varphi . x + \cos\varphi . y.$$

Эти формулы можно написать в виде тензора или, как его иногда называют, *ротора* $\mathbf{R}_z^{\varphi}$, где значки указывают угол поворота и направления оси:

$$\mathbf{R}_z^{\varphi} = \begin{vmatrix} +\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & +\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Мы можем разложить этот тензор на симметричный и антисимметричный по § **132**, стр. 144:

$$\mathbf{T}_{sym} = \begin{vmatrix} +\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & +\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{T}_{ant} = \begin{vmatrix} 0 & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь преобразуем координаты так, чтобы прежняя ось Z направилась по $\mathbf{s}$ и образовала с новыми осями координат углы, косинусы которых α, β, γ. При этом симметричный тензор преобразуется по формулам **§ 141**, стр. 190:

$$\mathbf{T}_{sym} = \begin{vmatrix} \alpha^2 + (1-\alpha^2)\cos\varphi & \alpha\beta(1-\cos\varphi) & \gamma\alpha(1-\cos\varphi) \\ \alpha\beta(1-\cos\varphi) & \beta^2+(1-\beta^2)\cos\varphi & \beta\gamma(1-\cos\varphi) \\ \gamma\alpha(1-\cos\varphi) & \beta\gamma(1-\cos\varphi) & \gamma^2+(1-\gamma^2)\cos\varphi \end{vmatrix}$$

а антисимметричный тензор преобразуется, как вектор

$$\mathbf{T}_{ant} = \begin{vmatrix} 0 & -\gamma\sin\varphi & +\beta\sin\varphi \\ +\gamma\sin\varphi & 0 & -\alpha\sin\varphi \\ -\beta\sin\varphi & +\alpha\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = [\sin\varphi\,\mathbf{s}_1 = [\mathbf{u}.$$

Здесь $\mathbf{s}_1$ есть единичный вектор по оси $\mathbf{s}$.

Таким образом для ротора получаем сумму вышенаписанных двух тензоров

$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathbf{T}_{sym} + \mathbf{T}_{ant}.$$

146. Сравнение ротора с векторным произведением. Из хода наших вычислений между прочим следует, что, вообще говоря, ротор отличается от векторного произведения. Но так как ротор есть простое вращение без деформации, то, очевидно, символ $[\mathbf{u}$ производит в поле вектора $\mathbf{r}$ некоторую деформацию. Выясним, что это за деформация.

Проще всего это сделать, если направить вектор $\mathbf{u}$ по оси Z; тогда для вектора $\mathbf{r}' = [\mathbf{ur}]$ получим:

$$r'_x = -u_z y, \quad r'_y = +u_z x, \quad r'_z = 0.$$

С другой стороны, мы знаем, что

$$\mathbf{r}' = [\mathbf{ur}] = ur\sin(ur),$$

при чем $\mathbf{r}'$ перпендикулярно к плоскости (ur).

Значит, при этом тензоре все радиусы-векторы увеличиваются в $u\sin(ur)$ раз и поворачиваются на 90°; только те радиусы остаются прежней величины, для которых $\sin(ur) = 0$, т.-е. которые параллельны оси $\mathbf{u}$.

147. Диады. Из составляющих двух векторов **A** и **B** можно составить тензор:

$$\begin{vmatrix} A_xB_x & A_yB_x & A_zB_x \\ A_xB_y & A_yB_y & A_zB_y \\ A_xB_z & A_yB_z & A_zB_z \end{vmatrix}.$$

Его называют *диадой* и обозначают так: **(A; B)**.

Перестановка векторов **A** и **B** изменяет диаду: ряды становятся столбцами, и наоборот. Каждая диада состоит из симметричной и антисимметричной части:

$$\begin{vmatrix} A_xB_x & \frac{1}{2}(A_yB_x+A_xB_y) & \frac{1}{2}(A_zB_x+A_xB_z) \\ \frac{1}{2}(A_xB_y+A_yB_x) & A_yB_y & \frac{1}{2}(A_zB_y+A_yB_z) \\ \frac{1}{2}(A_zB_x+A_xB_z) & \frac{1}{2}(A_yB_z+A_zB_y) & A_zB_z \end{vmatrix} + \frac{1}{2}[\mathbf{AB}].$$

Легко видеть, что антисимметричная часть этого тензора имеет те же составляющие, что половина векторного произведения **A** на **B**.

Симметричная часть диады имеет тензорным эллипсоидом

$$(A_xx+A_yy+A_zz)(B_xx+B_yy+B_zz)-1=0.$$

Но это есть уравнение цилиндрической поверхности.

Как видим, диада представляет собою совершенно особый тензор.

Диады играют довольно большую роль в математической теории тензоров, поэтому мы и сочли нужным упомянуть о них, но мы ими пользоваться не будем.

Полагая **A** равным **B**, можно составить симметричный тензор:

$$\begin{vmatrix} A^2_x & A_xA_y & A_xA_z \\ A_xA_y & A^2_y & A_yA_z \\ A_xA_z & A_yA_z & A^2_z \end{vmatrix} = (\mathbf{A};\mathbf{A}).$$

Оба эти специальные тензора иногда встречаются в физике.

148. Составление тензора из диад. Не нужно, однако, думать что из произведений двух векторов **A** и **B** можно составить *любой*

данный тензор. Что это не всегда возможно, яснее всего можно видеть, если взять сперва пример в двух измерениях.

Пусть дан тензор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и требуется найти два вектора **A** и **B**, чтобы иметь:

$$a_{11}=A_xB_x \qquad a_{12}=A_yB_x$$
$$a_{21}=A_xB_y \qquad a_{22}=A_yB_y.$$

Но из этих равенств следовало бы, что

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

а между тем мы предполагаем, что нам дан *любой* тензор, в котором этих соотношений может и не быть.

Однако, если взять еще два *любых* вектора **M** и **N** и положить:

$$a_{11}=M_xA_x+N_xB_x \qquad a_{12}=M_xA_y+N_xB_y$$
$$a_{21}=M_yA_x+N_yB_x \qquad a_{22}=M_yA_y+N_yB_y,$$

тогда, если даже **M** и **N** заданы *произвольно,* мы тем не менее имеем возможность из четырех уравнений определить составляющие **A** и **B** так, чтобы получились определенные, любым образом заданные числа a_{ik}.

Аналогично с этим обстоит дело и в трех измерениях. Любой данный нам тензор мы можем составить из произведений векторных составляющих **A**, **B** и **C**, только для этого нам необходимо выбрать еще какие-либо три вектора **M**, **N**, **P** для того, чтобы иметь девять уравнений такого вида

$$a_{ik}=M_iA_k+N_iB_k+P_iC_k \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\}=1,\ 2,\ 3,$$

из которых и определить **A**, **B** и **C**.

Как известно, решение девяти линейных уравнений с девятью неизвестными получается определенное, если только детерминант из коэффициентов не равен нулю. Но коэффициентами этих уравнений служат составляющие векторов **M**, **N**, **P**, и требование, чтобы детерминант из коэффициентов не равнялся нулю, равносильно требо-

ванию, чтобы эти векторы не лежали в одной плоскости, не были компланарны (см. **§ 30**, стр. 28).

Итак, любой данный тензор при любых данных не компланарных векторах **M**, **N**, **P** можно составить из трех пар векторов **(M; A)**, **(N; B)**, **(P; C)**, т.-е. из трех диад.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ.

149. Дифференциальные и элементарные тензоры. Если все составляющие тензора беспредельно приближаются к нулю, или, иначе говоря, представляют собою такие малые величины, что их квадратами и произведениями можно пренебречь, по сравнению с их первыми степенями, то такие тензоры мы будем называть *дифференциальными* и обозначать $\mathbf{T}_d$.

Но в физике очень часто встречаются тензоры, которых диагональные члены мало отличаются от единицы, а боковые мало отличаются от нуля. Например,

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+\varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

где все ε очень малы.

Подобные тензоры мы будем называть *элементарными*.

Очевидно, что *элементарный* тензор представляет собою сумму из *единичного* и *дифференциального* тензоров:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_d.$$

С элементарными тензорами гораздо проще обращаться, чем с рассмотренными выше конечными тензорами, потому что при вычислениях мы всегда можем пренебрегать высшими степенями ε в сравнении с первой степенью.

Так, например, в детерминанте из составляющих этого тензора у нас останутся только члены

$$|\varepsilon| = 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Далее, тензор *обратный* данному мы получим простою переменой знака у всех ε. Действительно, субдетерминант, например, первого члена равен

$$(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33}) - \varepsilon_{32}\varepsilon_{23} = 1 + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

разделяя это на $|\varepsilon|$, получаем первый член обратного тензора

$$\frac{1+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}=(1+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})(1-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})=1-\varepsilon_{11}.$$

Точно так же получим и остальные члены.

Следовательно, для элементарного тензора можем написать

$$(\mathbf{T}_\varepsilon)^{-1}=\mathbf{T}_{-\varepsilon}.$$

Если мы возьмем еще второй элементарный тензор

$$\mathbf{T}_k=\begin{vmatrix}1+k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & 1+k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & 1+k_{33}\end{vmatrix}$$

и применим оба эти тензора последовательно к одному и тому же вектору, т.-е. составим произведение этих тензоров, то, поступая по формулам **§ 140**, стр. 147 и отбрасывая произведения малых величин εk, получаем

$$\mathbf{T}_{k\varepsilon}=\mathbf{T}_k\,\mathbf{T}_\varepsilon=\begin{vmatrix}1+\varepsilon_{11}+k_{11} & \varepsilon_{12}+k_{12} & \varepsilon_{13}+k_{13}\\ \varepsilon_{21}+k_{21} & 1+\varepsilon_{22}+k_{22} & \varepsilon_{23}+k_{23}\\ \varepsilon_{31}+k_{31} & \varepsilon_{32}+k_{32} & 1+\varepsilon_{33}+k_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{T}_\varepsilon+\mathbf{T}_k+\mathbf{T}_1.$$

Итак, произведение элементарных тензоров отличается от их суммы на единичный тензор.

Наконец, если мы в роторе (стр. 196, **145**) предположим угол φ очень малым ($=d\varphi$), так что $\sin\varphi$ можно положить равным $d\varphi$, а $\cos\varphi$ положить равным единице, то вся его симметричная часть обращается в единицу, и ротор делается эквивалентным своей второй антисимметричной части. В то же самое время в антисимметричной части деформация делается равной нулю. Таким образом весь *ротор* вектора $\mathbf{r}$ обращается в *вектор* $[\mathbf{d}\varphi.\mathbf{r}]$.

Здесь мы опять видим, что хотя повороты на конечные углы не могут считаться вектором — это суть роторы,— тем не менее, бесконечно малые повороты $d\varphi$ и угловые скорости $\frac{d\varphi}{dt}$ обладают свойствами векторов.

Полезно заметить себе, что

$$[\mathbf{T}_\varepsilon\mathbf{A}.\mathbf{T}_\varepsilon\mathbf{B}] = \mathbf{T}_{-\varepsilon}[\mathbf{AB}].$$

Проверить это предоставляем читателю.

Из всего вышесказанного мы можем сделать такое заключение: если нам дан какой-либо *элементарный тензор*, то мы всегда можем его считать составленным из двух тензоров: одного *симметричного* и другого *ротора.*

Иначе говоря, всякий элементарный тензор можно разложить на чистую деформацию и на чистое вращение

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{D} + \mathbf{R}.$$

Из этих двух тензоров тензор деформации $\mathbf{D}$ будет представлять собою опять *элементарный* тензор, только симметричный. Что касается ротора $\mathbf{R}$, то это будет *дифференциальный* тензор, означающий поворот всего поля на угол $d\varphi$.

150. Перемещение точек сплошного тела. Представим себе непрерывное физическое тело, отдельные точки которого O переместились на длину $\mathbf{a}$ (рис. 116). Вектор смещения $\mathbf{a}$ может для различных материальных точек тела иметь различную величину и различное направление, другими словами, пусть вектор $\mathbf{a}$ образует векторное поле.

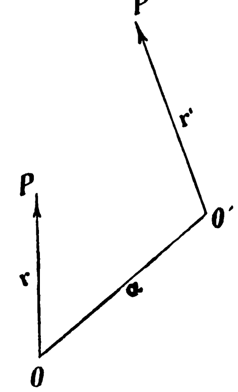


Рис. 116.

Вместе с каждой сместившейся точкой O перешли в новое положение и соседние с ней точки P. Обозначим OP через $\mathbf{r}$ и будем подразумевать под этим бесконечно малый вектор (то, что мы прежде называли через $d\mathbf{s}$), определяющий положение точки P относительно O. При перемещении точки O в новое положение O', каждая соседняя точка P тоже перейдет в новое положение P', при чем вектор $\mathbf{r}$ может изменить и свою величину и свое направление и превратиться в некоторый другой вектор $\mathbf{r}'$. Мы будем предполагать, что все эти изменения настолько малы, что в соотношении между $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ достаточно принять во внимание только члены *первой* степени, откинув все члены более высоких степеней. Значит, мы предполагаем, что зависи-

мость $\mathbf{r}'$ от $\mathbf{r}$ *линейная* и выражается некоторым элементарным тензором

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{r}.$$

Прежде чем дать общее выражение для этого элементарного тензора как функции смещения точек поля, мы разберем отдельные частные случаи, так как эти частные случаи дадут нам более наглядное представление и об общем случае.

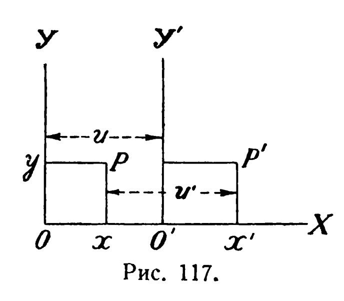


Рис. 117.

151. Плоская элементарная деформация. Рассмотрим смещение точек в плоскости XY. Предположим, что точка O (рис. 117) переместилась по оси X на величину $a_x = u$. Соседняя с ней точка x может при этом переместиться на некоторую другую величину u'. Однако, вследствие малой разницы между этими двумя смещениями, мы можем положить

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} x.$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial x}$ означает изменение величины u на *единицу* длины при переходе в соседние точки по оси X, а следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} x$ означает увеличение величины u для всей длины x.

При таком смещении точек новая координата точки x относительно нового начала O' будет равна

$$x' = x + u' - u$$

или, приняв во внимание соотношение между u' и u, имеем:

$$x' = x + \frac{\partial u}{\partial x} x = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) x.$$

Из этого мы видим, что при смещении точки O произошло кроме того *расширение* или сжатие, смотря по тому, положительно или отрицательно $\frac{\partial u}{\partial x}$. При этом увеличение *единицы* длины координаты x равно $\frac{\partial u}{\partial x}$; эта последняя величина называется *относительным удлинением*.

Теперь рассмотрим другой случай. Положим, что все точки тела по оси X переместились одинаково, так что *никакого расширения нет;* но пусть точки, лежащие вне оси X, с координатой y, отличной от нуля, смещаются иначе, чем точки оси X (рис. 118). Для очень малых ординат y мы всегда можем положить смещение точки P пропорциональным y и написать

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial y} y.$$

Поэтому новая абсцисса точки P будет

$$x' = x + \frac{\partial u}{\partial y} y.$$

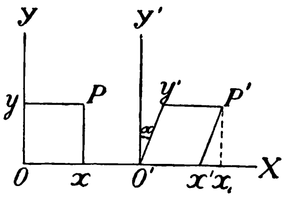


Рис. 118.

Здесь опять $\frac{\partial u}{\partial y}$ означает изменение смещения u на *единицу* длины при переходе в соседние точки, но теперь не по X, а по оси Y.

Такого рода деформация тела называется *сдвигом.*

В рассмотренном нами сдвиге все линии, параллельные оси X, не изменяют своего направления, а все линии, параллельные оси Y, наклоняются и образуют с осью Y угол α, которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Прямоугольный четыреугольник $OxPy$ после перемещения превратился в параллелограмм $O'x'P'y'$, но *величина площади* xy осталась неизменною.

Так как по оси Z у нас никаких изменений не происходит, то мы можем сказать, что при нашем сдвиге и *объем* тела не изменился.

Изменение *формы* тела без изменения *объема*, это — характерная особенность деформации *сдвига.*

Если расширение и сдвиг по оси X происходят одновременно, то, очевидно, будем иметь

$$x' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) x + \frac{\partial u}{\partial y} y.$$

Теперь положим, что смещение точки O происходит не по оси X, а по оси Y, и назовем это смещение через v. Пусть по этой оси

тоже происходит и расширение и сдвиг. Тогда и для этого случая мы должны будем написать аналогичную формулу:

$$y' = \frac{\partial v}{\partial x} x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) y.$$

В обеих написанных нами формулах величины x и y суть составляющие радиуса-вектора $\mathbf{r}$ ближайших к O точек тела *до* смещения, а x' и y' суть составляющие того вектора $\mathbf{r}'$, в который превратился вектор $\mathbf{r}$ *после* смещения точек O и P. Изменение вектора $\mathbf{r}$ мы предполагаем настолько малым, что зависимость $\mathbf{r}'$ от $\mathbf{r}$ можно считать линейной и выразить ее элементарным тензором

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{r}.$$

Для только что разобранного нами случая двух измерений тензор $\mathbf{T}_\varepsilon$ будет иметь вид

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Этот тензор не симметричен. Но мы можем разложить его по правилам **§ 144**, стр. 194, на симметричный тензор (т.-е. на деформацию) и на вращение. Получим

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{curl}_z \mathbf{a} = \left[\quad d\varphi\right.\right.$$

Из этого мы видим прежде всего, что тензор *поворота* элементарного объема около точки O, т.-е *ротор*, имеет те же составляющие, что и вектор, равный половине вихря векторного поля смещений $\mathbf{a}$

$$\operatorname{curl} a = 2d\varphi.$$

Напомним читателю, что с подобным же соотношением мы уже встретились в теории вихревого поля жидкости (стр. 122, **100**), с тою, однако, разницею, что там, вместо вектора *смещения* $\mathbf{a}$, мы рассматривали вектор *скорости* частиц жидкости $\mathbf{v}$, а потому, вместо поворота на некоторый угол $d\varphi$, мы получали *угловую* скорость вращения $\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{u}$ частиц жидкости. Там мы имели

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = 2\,\mathbf{u}.$$

Далее, первый тензор нашего разложения $\mathbf{D}$ мы можем разложить еще на два тензора

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

Первый из этих тензоров представляет собою простое *расширение* по осям X и Y, при чем площадь xy обращается в

$$x'y' = xy\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = xy\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Так как по оси Z у нас ничего не меняется, то мы можем сказать, что при этом расширении единица объема увеличилась на величину

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Второй из этих тензоров представляет собою *чистый сдвиг*. Действительно, мы знаем, что в нем нет вращения, которое уже выделено в $\mathbf{R}$, и легко убедиться, что в нем нет и изменения объема.

152. Соотношение между сдвигом и линейным расширением. Полезно заметить себе, что рассмотренные нами выше (стр. 203, **151**, рис. 118) сдвиги не представляют собою *чистых* сдвигов, *чистой* деформации; их тензор не симметричен и заключает в себе еще невыделенный *ротор*.

Геометрически это нужно себе представлять следующим образом (рис. 119).

Сдвиг, который мы рассматривали параллельно оси X, представлен на рис. a. Такой же сдвиг по оси Y представлен на рис. b Между тем на рис. c представлены оба сдвига одновременно, но в половинном размере. Этот последний чертеж мы могли бы получить простым расширением по оси X' и одновременным сжатием по оси Y'. Здесь мы имеем *чистую* деформацию, а для того, чтобы получить чертежи a и b, нам нужно чертеж c еще повернуть вправо или влево.

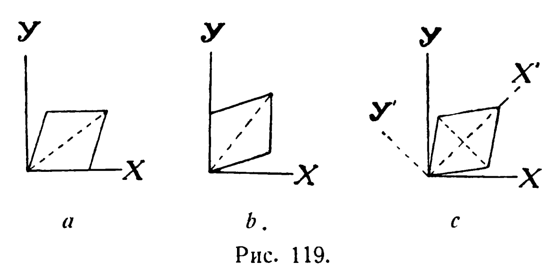


Рис. 119.

Из тех же чертежей, между прочим, видно, что два одинаковых сдвига по X и Y производят расширение и сжатие по осям X' и Y', наклоненным под углом 45° к осям X и Y.

Если бы читатель пожелал убедиться в этом и аналитически, на основании теории тензоров, то он мог бы это сделать следующим образом.

Откинув в нашем тензоре деформацию расширения, т.-е. положив

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

мы получаем:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{где } s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Тензорный эллипсоид этой деформации будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + 2s\,xy - 1 = 0.$$

Повернем оси XY на 45°, тогда новые координаты будут x_1 и y_1, при чем

$$x = (x_1 - y_1)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = (x_1 + y_1)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

где

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение тензорного эллипсоида, получаем

$$x_1^2 + y_1^2 + s(x_1^2 - y_1^2) - 1 = 0.$$

Тензор этого эллипсоида будет

$$\mathbf{D}' = \begin{vmatrix} 1+s & 0 \\ 0 & 1-s \end{vmatrix}$$

Следовательно, по оси X' мы имеем расширение, а по оси Y' равное ему сжатие, что и требовалось доказать.

В тензоре $\mathbf{D}$ не было видно расширения, зато в тензоре $\mathbf{D}'$ мы не видим сдвигов. Тем не менее, и то и другое существует.

Только в том случае, когда тензор деформации имеет одинаковые диагональные члены, а все боковые члены равны нулю, т.-е. в том простом случае, который мы рассматривали в начале §, мы имеем равномерное во все стороны расширение без сдвигов.

Мы показали выше, что при чистом сдвиге меняется только форма, но без изменения объема. Теперь мы видим, что хотя *объемы* при чистом сдвиге и не меняются, тем не менее, *линейные* размеры тела могут меняться.

153. Элементарная деформация в пространстве. Обобщая полученные результаты на три измерения, получаем следующее.

Когда отдельные точки непрерывного тела перемещаются на некоторую величину $\mathbf{a}$, то, вследствие неоднородности этого поля, около каждой сместившейся точки получается изменение элементарных радиусов-векторов $\mathbf{r}$, проведенных в соседние точки. Элементарные радиусы-векторы меняют и свою величину и свое направление: радиус $\mathbf{r}$ превращается в $\mathbf{r}'$.

Если все эти изменения очень малы, то можно положить

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}_{:}\mathbf{r}.$$

Обозначим составляющие вектора смещения **a** через u, v, w. Тогда элементарный тензор $\mathbf{T}_\varepsilon$ должен иметь вид

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Этот тензор мы разлагаем на три тензора: *расширение, сдвиг* и *поворот.*

Тензор расширения будет

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Следовательно, если до расширения мы имели некоторый параллелепипед xyz, то после расширения он обратится в

$$x'y'z' = xyz\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$= xyz\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Мы видим, что увеличение *единицы* объема, или относительное расширение, будет равно

$$\frac{\delta(do)}{do} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Если мы возьмем другие координаты, то тензор наш, конечно, изменит свои составляющие, но сумма его диагональных членов при этом не изменится, так как мы доказали (стр. 192, **142**), что это есть *инварианта* преобразования. Здесь мы еще раз убеждаемся в этом, потому что относительное увеличение объема $\operatorname{div}\mathbf{a}$ как

и всякий скалар, совершенно не зависят от выбора системы координат.

Тензор сдвига будет

$$\begin{vmatrix} 0 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & 0 & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & 0 \end{vmatrix}$$

причем сдвиги параллельно плоскостям (XY), (YZ) и (ZX) будут соответственно

$$s_{xy} = s_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$s_{yz} = s_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$s_{zx} = s_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Эти величины не инвариантны и зависят от выбора системы координат.

Наконец, элементарный угол поворота будет

$$d\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{curl}\mathbf{a}$$

с составляющими по осям X, Y, Z или по плоскостям (YZ), (ZX), (XY)

$$d\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \qquad d\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

154. Линейное удлинение. Если соотношение между векторами расстояний двух смежных точек тела $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ до смещения и после смещения выражается формулою

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{r},$$

то, очевидно, разность этих двух векторов будет

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = d\mathbf{r} = \mathbf{T}_d \mathbf{r}.$$

Вследствие малости угла поворота $d\varphi$ (рис. 120) мы можем линейное удлинение радиуса $\mathbf{r}$, т.-е. δr, считать проекцией вектора $d\mathbf{r}$ на ось OP'', т.-е. на $\mathbf{r}$, и написать

$$\delta r = \frac{(\mathbf{r}.d\mathbf{r})}{r}.$$

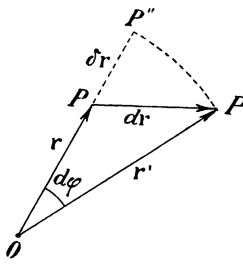


Рис. 120.

Относительное удлинение радиуса-вектора, т.-е. удлинение *единицы* длины его, будет

$$\varepsilon = \frac{\delta r}{r} = \frac{(\mathbf{r}.d\mathbf{r})}{r^2} = \frac{(\mathbf{r}.\mathbf{T}_d\mathbf{r})}{r^2}.$$

Здесь в числителе у нас стоят члены уравнения тензорного эллипсоида $\mathbf{T}_d$, т.-е.

$$\varepsilon_{11}x^2 + \varepsilon_{22}y^2 + \varepsilon_{33}z^2 + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})xy + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32})yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13})zx.$$

Разделяя это на $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и обозначая

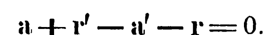
$$\frac{x}{r} = \cos(rX) = l; \qquad \frac{y}{r} = \cos(rY) = m; \qquad \frac{z}{r} = \cos(rZ) = n,$$

получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_{11}l^2 + \varepsilon_{22}m^2 + \varepsilon_{33}n^2 + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})lm + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32})mn + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13})nl.$$

Эта формула дает нам величину *относительного удлинения* для каждого направления радиуса l, m, n.

155. Связь дифференциального тензора с производной вектора по оси. Мы обозначали смещение точки O через $\mathbf{a}$. Если обозначить смещение точки P, т.-е. вектор PP', через $\mathbf{a}'$, то все четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ образуют в пространстве замкнутый четыреугольник и, следовательно (см. рис. 121),



$$\mathbf{a} + \mathbf{r}' - \mathbf{a}' - \mathbf{r} = 0.$$

Откуда

$$\mathbf{a}' - \mathbf{a} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{r} = \mathbf{T}_d\mathbf{r}.$$

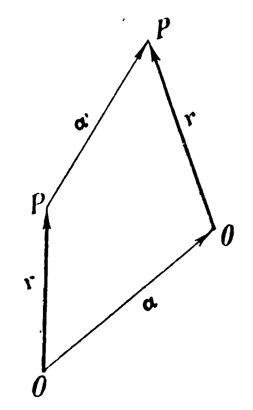


Рис. 121.

Введем вместо знака **r** обычное обозначение расстояния между двумя смежными точками, а именно $d\mathbf{s}$, с проекциями на оси координат dx, dy, dz.

Если теперь написать составляющую $d\mathbf{a}$ по оси X, то получим

$$da_x = dx\frac{\partial u}{\partial x} + dy\frac{\partial u}{\partial y} + dz\frac{\partial u}{\partial z}\cdot$$

Сравнивая это уравнение с теми, которые у нас написаны в § **55** стр. 54, мы видим, что

$$d\mathbf{a} = (\mathbf{T}_d.\mathbf{s}_1)\,ds = (d\mathbf{s}.\nabla)\,\mathbf{a} = (\mathbf{s}_1.\mathrm{grad})\mathbf{a}\,ds,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{T}_d\mathbf{s}_1 = (\mathbf{s}_1\,\mathrm{grad})\,\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{ds}\cdot$$

Итак, дифференциальный тензор смещения точек непрерывного тела, примененный к единичному вектору оси $\mathbf{s}_1$, представляет собою не что иное, как производную вектора смещения **a** по этой оси **s**.

156. Сравнение полей скалярных, векторных и тензорных. В предыдущей главе мы подробно изучали поле *скалара* φ, при чем величина φ была данной функцией координат $\varphi(x, y, z)$. Эту функцию мы изображали системой *эквипотенциальных поверхностей.*

В случае *векторного* поля должны быть даны для каждой точки поля составляющие вектора по осям координат, т.-е. *три* функции координат

$$v_i = f_i(x, y, z) \qquad i = x, y, z.$$

Это поле мы иллюстрировали *линиями сил.*

Наконец, когда *тензор* образует поле и в различных точках пространства имеет различные значения, то должны быть даны все его составляющие для каждой точки поля, т.-е. необходимо дать *девять* функций

$$a_{ik} = T_{ik}(x, y, z) \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3.$$

Если предполагать тензор элементарным и разложенным на его симметричную и антисимметричную части, т.-е. на деформацию и ротор, то для первой части должны быть даны шесть функций,

а для второй (это есть вектор) — должны быть даны еще три функции.

Симметричную часть тензора мы изображали эллипсоидами; размеры осей и положение этих эллипсоидов в различных точках поля будут, вообще говоря, различны.

Антисимметричную часть тензора, как и всякий вектор, можно изобразить линиями сил.

Из *скалярного* поля φ мы получали *векторное* поле

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\nabla\varphi.$$

Формально мы можем смотреть на последнее выражение, как на произведение гамильтонова вектора ∇ на скалар φ.

Точно также из любого *векторного* поля мы можем путем составления производных получить *тензор*, который мы уже рассматривали в предыдущем параграфе

$$\mathbf{T}_d = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Этот тензор можно формально считать составленным из произведений составляющих двух векторов: вектора Гамильтона ∇ и вектора смещений с его составляющими u, v, w.

Переход от вектора $\mathbf{a}$ к тензору $\mathbf{T}_d$ имеет некоторое сходство с переходом от скалара φ к вектору $\mathbf{v}$.

Действительно,

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

означает изменение скалара φ, отнесенное к единице пути при переходе в соседнюю точку поля по нормали $d\mathbf{n}$ к эквипотенциальной поверхности.

Точно также

$$\mathbf{T}_d\mathbf{s}_1 = \frac{d\mathbf{a}}{ds},$$

т.-е. тензорное соотношение, коего коэффициенты написаны выше в виде детерминанта, в применении к единичному вектору $\mathbf{s}_1$ означает изменение вектора $\mathbf{a}$ при переходе по пути $d\mathbf{s}$, отнесенное к единице этого пути.

Если принять во внимание, что *скалар* не меняет своей величины при преобразовании координат, что *вектор* преобразуется, как первые степени координат, а *тензор*, как вторые степени координат, и если условиться называть:

скалар величиною нулевого порядка,
вектор „ первого порядка,
тензор „ второго порядка,

то мы можем сказать, что применение операции grad, или *дифференцирования по оси*, повышает порядок величины на единицу: из скалара делается вектор, из вектора делается тензор.

Наоборот, применение операции div, или определение *расхождения* или *потока*, понижает порядок величины тоже на единицу. Так, например, мы увидим, что из *тензора* давлений в упругом теле можно при помощи операции $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$ получить силу, т.-е. *вектор*.

Из поля *вектора* $\mathbf{v}$ применением операции div мы получали поле источников, т.-е. *скалар*.

Диагональные члены *тензора* $\mathbf{T}_d$ тоже дают операцию div и в применении к *вектору* смещения $\mathbf{a}$ дают объемное расширение, т.-е. *скалар*. В этом случае порядок величины понижается на *две* единицы.

В дальнейшем мы встретимся с такими физическими полями, в которых совмещено два тензорных поля, находящихся в линейной зависимости друг от друга. При этом получается тензорное поле не второго порядка, а еще более высокого порядка и т. д.

3. КООРДИНАТЫ.

157. Прямолинейные косоугольные координаты. Наиболее употребительны прямоугольные, декартовы координаты. Однако, имея в виду дальнейшие применения, нам необходимо познакомиться также со свойствами косоугольных прямолинейных координат. При этом изученные нами в предыдущих главах свойства векторов и тензоров окажут нам существенную услугу.

Пусть X^1, X^2, X^3 (рис. 122) — три прямолинейных оси координат, которые могут быть и не перпендикулярны друг к другу. Положение какой-либо точки P определяется величиной и направлением радиуса-вектора **r**, проведенного из начала координат в эту точку.

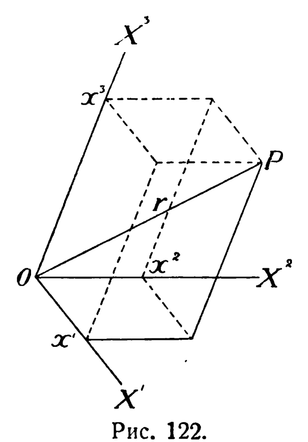


Рис. 122.

Составляющие вектора **r** по осям координат определяются следующим образом. Из точки P проводим линию, параллельную оси X^3, до пересечения ее плоскостью $[X^1 X^2]$; длина этой линии и будет составляющая радиуса-вектора по оси X^3. Аналогично поступаем для определения двух других составляющих.

Но мы можем поступить и иначе: через точку P можно провести три плоскости, параллельные плоскостям координат. Пересечение всех шести плоскостей образует косой параллелепипед, грани которого и будут соответственно равны $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$.

Вектор **r** будет диагональ этого параллелепипеда и, следовательно,

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3.$$

Как здесь, так и в дальнейшем мы будем все оси координат обозначать одною и тою же буквой, а указатели 1, 2, 3 (номер оси) около букв будем ставить иногда внизу, а иногда вверху. Для того, чтобы верхние *указатели* нельзя было принять за *показатели* степени, мы будем возведение в степень обозначать особыми скобками. Так, например, квадрат координаты x^2 будем обозначать $(x^2)^2$.

Для того, чтобы наши формулы были возможно общее, мы будем представлять каждую составляющую вектора **r** в виде произведения единичного вектора **e** на скалар x и этот скалар будем называть *координатою* точки P. Единичные векторы **e** для разных осей могут быть различными, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$; но они, также как и оси, не должны лежать в одной плоскости, не должны быть компланарными.

Впоследствии мы еще более обобщим наши результаты, предположив, что эти векторы **e** суть функции координат, т.-е. образуют *поле векторов*, но сейчас для нас $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ будут просто

три некопланарных постоянных вектора, данных нам по величине и по направлению. Мы можем теперь переписать вышенаписанное уравнение в таком виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x^1 + \mathbf{e}_2 x^2 + \mathbf{e}_3 x^3.$$

Для того, чтобы при данных нам координатных векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определить составляющие вектора $\mathbf{r}$, умножим это уравнение скалярно на $[\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]$ и, приняв во внимание, что все произведения с одинаковыми множителями равны нулю (стр. 18, **21**),

$$\mathbf{e}_2 [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = 0, \quad \mathbf{e}_3 [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = 0 \text{ и т. д.},$$

получим

$$\mathbf{r} [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = e x^1; \quad \mathbf{r} [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1] = e x^2; \quad \mathbf{r} [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = e x^3$$

$$x^1 = \frac{\mathbf{r} [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3]}{e}; \quad x^2 = \frac{\mathbf{r} [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1]}{e}; \quad x^3 = \frac{\mathbf{r} [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]}{e},$$

где

$$e = \mathbf{e}_1 [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_2 [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_3 [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2].$$

Здесь e есть, очевидно, объем параллелепипеда, образуемого единичными векторами координат.

Левые части написанных выше уравнений тоже суть объемы параллелепипедов, образуемых вектором $\mathbf{r}$ с каждою парою из осей координат. Следовательно, наши координаты x^1, x^2, x^3 представляют собою отношения соответствующих объемов. Скаларную величину радиуса-вектора $\mathbf{r}$ мы можем определить при данных координатах по формуле

$$(\mathbf{r})^2 = g_{11} (x^1)^2 + g_{22} (x^2)^2 + g_{33} (x^3)^2 + \\ + 2 g_{12} x^1 x^2 + 2 g_{23} x^2 x^3 + 2 g_{31} x^3 x^1,$$

при чем

$$g_{11} = (\mathbf{e}_1)^2, \quad g_{22} = (\mathbf{e}_2)^2, \quad g_{33} = (\mathbf{e}_3)^2,$$

$$g_{12} = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \quad g_{23} = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3), \quad g_{31} = (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1).$$

Эти 6 величин g_{ik} образуют симметричный тензор

$$\mathbf{T}_g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad g_{ik} = g_{ki}.$$

Нетрудно доказать, что детерминант этого тензора, который обозначим через $|g_{ik}|$, равен e^2. Действительно, для этого стоит только взять какие-либо прямоугольные оси координат и написать

$$e = \mathbf{e}_1 [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix}$$

При возведении этого детерминанта в квадрат, т.-е. при умножении его самого на себя, мы получаем детерминант g_{ik}. Итак, мы можем заметить себе, что

$$e^2 = |g_{ik}|.$$

158. Взаимные системы координат. Возьмем новую систему координат с тем же началом, но так, чтобы направление нового вектора $\mathbf{e}^1$ было перпендикулярно к $\mathbf{e}_2$ и к $\mathbf{e}_3$ и кроме того чтобы было удовлетворено условие $\mathbf{e}^1 \mathbf{e}_1 = 1$. Совершенно таким же образом выберем и остальные координатные векторы $\mathbf{e}^2$ и $\mathbf{e}^3$. Формулами это выразится таким образом: мы полагаем

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3]}{e}, \qquad \mathbf{e}^2 = \frac{[\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1]}{e}, \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{[\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2]}{e},$$

при чем e, как и выше, равно объему параллелепипеда, построенного на *прежних* координатных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

$$e = \mathbf{e}_1 [\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3].$$

Легко убедиться в том, что на основании этих формул старые координатные векторы будут выражаться через новые формулами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{[\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^3]}{e'}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{[\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}^1]}{e'}, \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{[\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^2]}{e'},$$

где e' есть объем параллелепипеда, построенного на *новых* координатных векторах $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$

$$e' = \mathbf{e}^1 [\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^3].$$

Мы видим, что старые единичные векторы выражаются через новые совершенно такими же формулами, как новые через старые. Впрочем, этого следовало и ожидать, потому что, если $\mathbf{e}^1$ перпендику-

лярно к e_2 и e_3, а e^2 перпендикулярно к e_3 и e_1, то, очевидно, e^3 перпендикулярно к e^1 и e^2 и т. д.; величины же старых и новых векторов связаны симметричными соотношениями вида $e^1 . e_1 = 1$.

Между старыми единичными векторами координат и новыми можно установить такие соотношения

$$(e^i . e_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Знак $\neq$ означает *неравенство.*

Предоставляем это доказать читателю.

Перейдем теперь к установлению соотношений между координатами.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ будет выражаться у нас в. той и другой системе координат таким образом:

$$\mathbf{r} = e_1 x^1 + e_2 x^2 + e_3 x^3 = e^1 x_1 + e^2 x_2 + e^3 x_3.$$

Умножаем это уравнение *скалярно* на все координатные векторы e последовательно. Принимая во внимание только что доказанное соотношение и обозначая, как и раньше,

$$(e_i e_k) = g_{ik}; \qquad (e^i e^k) = g^{ik},$$

получаем

$$x^1 = g^{11} x_1 + g^{12} x_2 + g^{13} x_3$$
$$x^2 = g^{21} x_1 + g^{22} x_2 + g^{23} x_3$$
$$x^3 = g^{31} x_1 + g^{32} x_2 + g^{33} x_3.$$

Точно также

$$x_1 = g_{11} x^1 + g_{12} x^2 + g_{13} x^3$$
$$x_2 = g_{21} x^1 + g_{22} x^2 + g_{23} x^3$$
$$x_3 = g_{31} x^1 + g_{32} x^2 + g_{33} x^3.$$

Встречающиеся в этих формулах величины g_{ik} и g^{ik} представляют собою составляющие двух симметричных тензоров

$$\mathbf{T}_g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}; \qquad (\mathbf{T}_g)^{-1} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{ik} = g_{ki}; \qquad g^{ik} = g^{ki}.$$

Каждый из этих тензоров служит другому обратным тензором, а потому между их составляющими должны иметь место соотношения:

$$g^{ik} = \frac{SD.\,|g_{ki}|}{D.\,[g_{ik}]}, \qquad g_{ik} = \frac{SD.\,[g^{ki}]}{D.\,|g^{ik}]}$$

$$\sum_{l=1,2,3} g^{il} g_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}$$

$$|g_{ik}| \cdot |g^{ik}| = 1.$$

Здесь D означает детерминант, SD — субдетерминант. Только что разобранные нами две системы косоугольных координат называются *взаимными*. Одна из них называется *ковариантною*, а другая — *контравариантною*.

Теми же терминами обозначаются и составляющие вектора **r**.

Какую из этих двух систем называть ковариантною и какую контравариантною — это, конечно, безразлично и зависит от нашего выбора.

Обыкновенно *контравариантные* координаты обозначают *верхними* указателями (индексами) x^1, а им взаимные, т.-е. *ковариантные* координаты — нижними указателями x_1.

Легко сообразить, что в *прямоугольных*, т.-е. декартовых координатах, разница между контравариантными и ковариантными составляющими пропадает. Мы можем сказать, что они сами себе взаимны. Кроме того, обыкновенно в декартовых координатах все единичные векторы берут одинаковыми, т.-е. равными одной и той же единице измерения. В таком случае

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3,$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \qquad g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.$$

159. Скалярное произведение взаимных координат. Возьмем каких-либо два радиуса-вектора **r** и **p** и составим их скалярное произведение. Координаты **r** обозначим через x^1, x^2, x^3, а координаты **p** через ξ^1, ξ^2, ξ^3. Тогда

$$(\mathbf{rp}) = (\mathbf{e}_1 x^1 + \mathbf{e}_2 x^2 + \mathbf{e}_3 x^3)\ (\mathbf{e}_1 \xi^1 + \mathbf{e}_2 \xi^2 + \mathbf{e}_3 \xi^3) =$$
$$= g_{11} x^1 \xi^1 + g_{22} x^2 \xi^2 + g_{33} x^3 \xi^3 + g_{12} (x^1 \xi^2 + x^2 \xi^1) +$$
$$+ g_{23} (x^2 \xi^3 + x^3 \xi^2) + g_{31} (x^3 \xi^1 + x^1 \xi^3).$$

Если в этом выражении собрать члены с x^1, x^2, x^3, то в скобках получим по формулам предыдущего параграфа ξ_1, ξ_2, ξ_3; если же собрать члены с ξ^1, ξ^2, ξ^3, то получим в скобках x_1, x_2, x_3. Поэтому скалярное произведение *вектора* $\mathbf{r}$ *на вектор* $\mathbf{p}$ можно выразить двумя формулами

$$(\mathbf{rp}) = x^1\xi_1 + x^2\xi_2 + x^3\xi_3 = x_1\xi^1 + x_2\xi^2 + x_3\xi^3 =$$
$$= \sum_i x^i\xi_i = \sum_i x_i\xi^i.$$

Эти формулы имеют совершенно такой же вид, как скалярное произведение в *прямоугольных* прямолинейных координатах. Разница только в том, что здесь составляется сумма парных произведений контра- и ковариантных координат данных векторов. А так как прямоугольные декартовы координаты сами себе взаимны, то в них безразлично, где написать индексы, вверху или внизу, и формула получает вид

$$(\mathbf{rp}) = r_x p_y + r_y p_y + r_z p_z.$$

Если оба вектора одинаковы, $\mathbf{r} = \mathbf{p}$, то

$$(\mathbf{r})^2 = x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3,$$

а в декартовых координатах

$$(\mathbf{r})^2 = (r_x)^2 + (r_y)^2 + (r_z)^2.$$

Для косинуса угла между двумя векторами имеем в косоугольных координатах общее выражение

$$\cos(rp) = \frac{\sum x^i\xi_i}{\sqrt{(r)^2(p)^2}}.$$

160. Преобразование прямолинейных координат. Если нам даны две любые (не взаимные) системы прямолинейных косоугольных координат с общим началом, то формулы перехода от одной системы к другой будут линейны и, следовательно, будут иметь вид тензорных соотношений. Мы можем их получить совершенно тем же путем, как мы получили формулы преобразования для взаимных координат. Обозначим одну систему координат латинскими, а другую греческими буквами

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x^1 + \mathbf{e}_2 x^2 + \mathbf{e}_3 x^3 = \varepsilon_1 \xi^1 + \varepsilon_2 \xi^2 + \varepsilon_3 \xi^3.$$

Умножим это равенство последовательно на выражения

$$\frac{[\mathrm{e}_l \cdot \mathrm{e}_m]}{e} \quad \text{и} \quad \frac{[\varepsilon_l \cdot \varepsilon_m]}{\varepsilon},$$

взяв l и m равными 1, 2, 3 и обозначая

$$a_i^k = \frac{\varepsilon_i\,[\mathrm{e}_l \cdot \mathrm{e}_m]}{e}; \qquad \alpha_i^k = \frac{\mathrm{e}_i\,[\varepsilon_l \cdot \varepsilon_m]}{\varepsilon};$$

получаем

$$\begin{aligned} \xi^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 \\ \xi^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 \qquad \xi^i = \Sigma a_k^i x^k \\ \xi^3 &= a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^1 &= \alpha_1^1 \xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + \alpha_3^1 \xi^3 \\ x^2 &= \alpha_1^2 \xi^1 + \alpha_2^2 \xi^2 + \alpha_3^2 \xi^3 \qquad x^i = \Sigma \alpha_k^i \xi^k. \\ x^3 &= \alpha_1^3 \xi^1 + \alpha_2^3 \xi^2 + \alpha_3^3 \xi^3 \end{aligned}$$

В этом более общем случае тензор преобразования будет не симметричен

$$a_i^k \neq a_k^i, \qquad \alpha_i^k \neq \alpha_k^i.$$

Тем не менее, так как каждая тройка этих соотношений может быть получена путем решения уравнений другой тройки, то между коэффициентами и должны иметь место соотношения:

$$a_i^k = \frac{SD \cdot \left[\alpha_k^i\right]}{\left|\alpha_k^i\right|}; \qquad \alpha_i^k = \frac{SD \cdot \left[a_k^i\right]}{\left|a_k^i\right|}$$

$$\sum_r a_i^r \alpha_r^k = \sum a_r^i \alpha_k^r = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Мы произвели эти вычисления для контравариантных координат (индексы вверху); для перехода к ковариантным координатам мы можем согласно **§ 157**, стр. 215, написать

$$\alpha_i^k = \frac{\varepsilon_i\,[\mathrm{e}_l \cdot \mathrm{e}_m]}{e} = \frac{[\varepsilon^l \cdot \varepsilon^m]\,\mathrm{e}_i^l}{\varepsilon},$$

$$a_i^k = \frac{\mathrm{e}_i\,[\varepsilon_l \cdot \varepsilon_m]}{\varepsilon} = \frac{[\mathrm{e}^l \cdot \mathrm{e}^m]\,\varepsilon^l}{e}.$$

Как видим, в результате у нас векторы $\mathbf{e}$ и ε поменялись местами, а, следовательно, a и α тоже. Отсюда мы заключаем, что ковариантные координаты преобразуются по формулам, *обратным* формулам преобразования контравариантных координат.

161. Преобразование векторов. Только что доказанная нами теорема о преобразовании контравариантных и ковариантных координат целиком относится и к составляющим любого вектора, потому что координаты сами представляют собою составляющие вектора, а именно — радиуса-вектора, проведенного из начала координат.

Тем не менее, полезно доказать эту теорему еще раз более наглядным способом.

Представим себе, что материальная точка передвинулась на длину $\mathbf{s}$ под действием постоянной силы $\mathbf{F}$. Работа, произведенная этой силой, будет

$$W = (\mathbf{F}\,.\,\mathbf{s}) = Fs \cos(Fs).$$

Это выражение есть скалар, а потому значение его для любой системы координат должно быть одно и то же.

Далее мы знаем, что если мы для $\mathbf{s}$ возьмем *контравариантные* координаты, т.-е. обычные параллельные координаты в выбранной нами системе координат x^1, x^2, x^3, то для вектора $\mathbf{F}$ мы должны будем взять ковариантные составляющие X_1, X_2, X_3, если хотим получить выражение работы в виде

$$W = (\mathbf{F}\,.\,\mathbf{s}) = X_1 x^1 + X_2 x^2 + X_3 x^3 = \sum X_i x^i.$$

Подставим сюда x^i, выраженные через ξ^i по формулам предыдущего параграфа; тогда получим

$$\begin{aligned}\sum_i X_i x^i = X_1 (\alpha_1^1 \xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + \alpha_3^1 \xi^3) + \\ + X_2 (\alpha_1^2 \xi^1 + \alpha_2^2 \xi^2 + \alpha_3^2 \xi^3) + \\ + X_3 (\alpha_1^3 \xi^1 + \alpha_2^3 \xi^2 + \alpha_3^3 \xi^3).\end{aligned}$$

Обозначим составляющие силы $\mathbf{F}$ в новых координатах греческими большими буквами Ξ_i. Тогда уравнение работы выразится в новых координатах формулою

$$\sum_i \Xi_i \xi^i,$$

а потому, на основании предыдущей формулы, имеем:

$$\Xi_i = \Sigma \alpha_i^k X_k.$$

Решая эти три уравнения относительно X, получаем

$$X_i = \sum a_k^i \Xi^k.$$

Сравнивая это с преобразованием контравариантных координат x^i и ξ^i, мы видим, что X_i имеют тензор преобразования *обратный* тензору преобразования контравариантных координат, что и требовалось доказать.

Мы могли бы доказать и обратную теорему, а именно: если мы желаем, чтобы сумма произведений составляющих двух векторов **A** и **B**

$$A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = \sum A_i B^i$$

была *скаларом* и не меняла ни своей формы, ни своего значения при любой системе косоугольных прямолинейных координат, то должны взять для одного из векторов его контравариантные составляющие, а для другого — его ковариантные составляющие.

Формулы же преобразования ковариантных составляющих в контравариантные и обратно для *любого* вектора **A** определяются тензорами g_{ik} и g^{ik}.

$$A_i = \sum_k g_{ik} A^k, \qquad A^i = \sum_k g^{ik} A_k.$$

Теперь принято вместо „вектор, заданный контравариантными составляющими“ говорить короче „контравариантный вектор“. Так, например, радиус-вектор **r**, смещение точки **s**, или d**s**, обыкновенно называют *контравариантными* векторами, т.-е. берут их параллельные проекции на выбранные оси координат.

В таком случае мы можем дать определение *векторам, вообще,* следующим образом.

Контравариантным вектором мы называем три числа A^i, которые при перемене осей координат преобразуются как смещение точки **s** или d**s**, т.-е. как разность координат.

Ковариантным вектором мы называем три числа B_i, которые в произведении $\Sigma A^i B_i$ с *любым* контравариантным вектором A образуют скалар.

Скаларом же называется величина, не меняющаяся при перемене координат.

162. Тензоры. Если, по аналогии с тем, что мы говорили о тензорах при прямоугольной системе координат (**§ 135**, стр. 179), взять

три оси координат, но не под прямыми углами друг к другу, и по каждой оси задаться линейными расширениями a, b, c, то поле векторов изменится по уравнениям

$$B_1 = aA_1, \qquad B_2 = bA_2, \qquad B_3 = bA_3.$$

Однако в этом случае мы уже не получим *чистой* деформации, как при прямоугольных координатах, а деформация будет сопровождаться вращением. В этом легко убедиться, если перейти от косоугольных координат к прямоугольным (предлагаем читателю это сделать); тензор получится, вообще говоря, *не симметричный.*

Впрочем, этого и следовало ожидать. Действительно, мы видели, что при чистой деформации только *главные* ее оси, которые *перпендикулярны* друг к другу, остаются в прежних направлениях, все же остальные радиусы-векторы поворачиваются на некоторый угол. Здесь же мы задались простым расширением без изменения направления по *косоугольным* координатным осям; этому условию можно удовлетворить только деформацией, сопровождаемой вращением, т.-е. несимметричным тензором в декартовых координатах.

Более общая линейная зависимость двух векторов в косоугольных координатах будет у нас и теперь иметь вид

$$B_1 = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$$
$$B_2 = a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3$$
$$B_3 = a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3$$

и будет обозначаться знаком

$$\mathbf{B} = \mathbf{TA},$$

т.-е. **B** равен тензору вектора **A**. Зависимость эта вполне определена, если дана система прямолинейных координат (может быть и косоугольная) и все составляющие тензора a_{ik}.

Формулы преобразования тензора в другие прямолинейные координаты с тем же началом будут те же самые, которые мы привели в **§ 142**, стр. 192. Формулы для обратного тензора будут опять иметь такой же вид, что и прежде, но без дополнительных условий перпендикулярности осей.

Если на тензор **T** смотреть как на формулы преобразования всех радиусов-векторов **r**, то вследствие *линейности* этих формул все пространство или все поле будет тоже преобразовываться линейно, и приведенные на стр. 192 правила остаются в силе.

Разница в тензорных правилах для *прямоугольных* и *косоугольных* координат начинает обнаруживаться при составлении скалярных произведений.

Скалярное произведение двух векторов **A** и **B** при косоугольной системе координат пишется так же, как и в декартовых координатах, но требует, чтобы один из векторов был ковариантным, а другой контравариантным. Поэтому, перед тем как составлять это произведение, необходимо один из контравариантных векторов преобразовать в ковариантный при помощи тензора g_{ik}. Так, например, в нашем случае, когда вектор **B** равен **TA** мы получим

$$(\mathbf{A}.\mathbf{B}) = (\mathbf{A}.\mathbf{TA}) = \sum \left(\sum_k g_{ik} A^k\right)\left(\sum T_l^i A^l\right).$$

В этом выражении можно переменить расположение членов суммы таким образом

$$\sum \left(\sum_k g_{ik} T_l^i\right) A^k A^l = \sum T_{kl} A^k A^l = \text{Scalar},$$

при чем

$$T_{kl} = \sum g_{ik} T_l^i.$$

Здесь T_{kl} есть тензор, и так как он множится на произведение из двух контравариантных векторов, то для того, чтобы образовать скалар, значение которого не зависит от выбора координат, он должен преобразовываться *противоположно* преобразованию произведения $A^k A^l$. Из этого вытекает целый ряд следствий.

Во-первых, мы видим, что тензоры при преобразовании координат преобразуются как *произведения* векторов.

Во-вторых, мы видим, что T_{ik} представляет собою ковариантный тензор и, наконец,

В-третьих, переход от *контравариантных* тензоров к ковариантным происходит при помощи того же тензора g_{ik}, что и для векторов. Однако различие между векторами и тензорами состоит, между прочим, в том, что у вектора только один значек, а у тензора их два. Поэтому для тензоров мы имеем два преобразования

$$\sum_k T^{ik} g_{lk} = T_l^i$$

и еще

$$\sum_k T_l^k . g_{ik} = T_{ik}.$$

Из всего этого мы видим, что нужно различать три рода тензоров:

T^{ik} — контравариантный тензор

$T_k^{\,i}$ — смешанный тензор, контра- и ковариантный,

T_{ik} — ковариантный тензор.

Далее, применение *смешанного* тензора к контравариантному вектору дает опять контравариантный вектор. Это те именно случаи, которые мы рассматривали в предыдущей главе. Тогда $\mathbf{B} = \mathbf{TA}$ означало то же самое, что теперь $B^i = \Sigma T_k^{\,i} A^k$. Однако применение контравариантного тензора к ковариантному вектору дает контравариантный вектор, потому что всегда должно иметь место соотношение:

$$\sum T^{ik} A_i B_k = \text{Scalar}.$$

На свойствах преобразования тензора, указанных выше, мы можем основать определение того, что такое тензор вообще, подобно тому, как это мы сделали в предыдущем параграфе для вектора. Подобные определения будут у нас играть большую роль в общей аналитической теории тензоров.

163. Криволинейные координаты. Перейдем теперь от прямолинейных координат x, y, z к криволинейным координатам u, v, w, положив

$$x = f_1(u, v, w), \qquad y = f_2(u, v, w), \qquad z = f_3(u, v, w).$$

Эти формулы преобразования будут, вообще, не линейные.

В полученных нами новых координатах проведем три системы поверхностей:

$$u = C_1, \qquad v = C_2, \qquad w = C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 суть постоянные для каждой из поверхностей параметры; для различных поверхностей даже одной и той же системы они будут иметь различные значения.

Пересечение поверхностей друг с другом дает три системы, вообще говоря, кривых линий.

Если, например, взять две поверхности $v = C_2$ и $w = C_3$, то по линии их пересечения будет меняться только u; если скомбинировать $w = C_3$ и $u = C_1$, то будет меняться только v; и, наконец, $u = C_1$ и $v = C_2$ дадут линию изменения w.

В каждой точке поля сойдутся три таких линии.

Проведем в какой-либо точке O к сходящимся там линиям u, v, w три касательных прямых линии и будем считать эти касательные *прямолинейными* (вообще говоря, косоугольными) координатами в данной точке. Для каждой точки мы получим таким образом свою особую систему косоугольных координат.

Какой-нибудь бесконечно малый радиус-вектор $d\mathbf{r}$, проведенный из этой точки O, может быть представлен в виде суммы

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 du + \mathbf{e}_2 dv + \mathbf{e}_3 dw,$$

и его скалярная величина определится уравнением:

$$(\mathbf{r})^2 = g_{11}(du)^2 + g_{22}(dv)^2 + g_{33}(dw)^2 +$$
$$+ 2g_{12}dudv + 2g_{23}dvdw + 2g_{31}dwdu.$$

Вообще, для каждой точки мы получим те же соотношения, которые мы вывели выше для косоугольных прямолинейных координат, с тою, однако, разницей, что для криволинейных координат векторы $\mathbf{e}_i$ и тензор g_{ik} будут функциями координат, т.-е. будут сами образовывать поле.

164. Ортогональные координаты. Мы ограничимся пока разбором только *ортогональных*, т.-е. прямоугольных, криволинейных координат. В этом случае все три вектора $\mathbf{e}$ будут перпендикулярны друг к другу, а в тензорах g_{ik} не будет составляющих с разными индексами, а именно

$$g_{11} = (e_1)^2, \quad g_{22} = (e_2)^2, \quad g_{33} = (e_3)^2, \quad g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.$$

Выразим в этих криволинейных координатах те величины, которые встречались нам в теории поля.

Элемент дуги $d\mathbf{s}$ выразится через

$$(d\mathbf{s})^2 = (e_1 du)^2 + (e_2 dv)^2 + (e_3 dw)^2.$$

Элементарные площадки на поверхностях координат будут:

$$d\mathbf{S}_{23} = e_2 e_3 dvdw, \qquad d\mathbf{S}_{31} = e_3 e_1 dwdu, \qquad d\mathbf{S}_{12} = e_1 e_2 dudv.$$

Элемент объема будет:

$$do = e_1 e_2 e_3 dudvdw = edudvdw.$$

Скаларное и векторное произведение двух векторов в ортогональных координатах вследствие одинаковости контра- и ковариантных составляющих будет писаться так:

$$(\mathbf{AB}) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3,$$

$$[\mathbf{AB}]_u = A_2B_3 - A_3B_2$$

и т. д.

Градиент скалара φ будет выражаться, как и всегда:

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{G} = \frac{d\varphi}{dn}, \qquad \mathbf{G}_s = \frac{d\varphi}{ds},$$

а его составляющие будут:

$$\mathbf{G}_u = \frac{1}{e_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \mathbf{G}_v = \frac{1}{e_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad \mathbf{G}_w = \frac{1}{e_3}\frac{\partial\varphi}{\partial w}.$$

Расхождение вектора $\mathbf{A}$, как мы знаем, есть предел отношения потока этого вектора сквозь элементарную замкнутую поверхность к элементарному объему, заключенному в этой поверхности. Расхождение будет выражаться формулой:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim\frac{\Sigma(\mathbf{A}\,.\,d\mathbf{S})}{dO} =$$

$$= \lim\frac{\Sigma(A_1e_2e_3dvdw + A_2e_3e_1dwdu + A_3e_1e_2dudv)}{edudvdw}.$$

Суммируя по двум противоположным площадкам (см. § **74** стр. 75) как это мы делали при доказательстве теоремы Гаусса, получаем для криволинейных координат:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{e}\left(\frac{\partial}{\partial u}(A_1e_2e_3) + \frac{\partial}{\partial v}(A_2e_3e_1) + \frac{\partial}{\partial w}(A_3e_1e_2)\right).$$

Если вектор $\mathbf{A}$ может быть представлен как grad некоторой потенциальной функции ψ, то уравнение $\operatorname{div}\mathbf{A} = -4\pi\rho$ обращается в уравнение Лапласа-Пуассона.

В криволинейных ортогональных координатах уравнение Лапласа-Пуассона будет, следовательно, иметь вид:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e_2e_3}{e_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e_3e_1}{e_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{e_1e_2}{e_3}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right) = -4\pi\rho.$$

Вихрь вектора $\mathbf{A}$, согласно § **98** стр. 115, равен пределу отношения циркуляции $\oint(\mathbf{A}\,d\mathbf{s})$ по элементарному замкнутому контуру к элементу площадки, для которой этот контур служит границею. Направления контура и нормали к площадке выбираются по правовинтовой системе.

$$\operatorname{curl}\mathbf{A} = \lim \frac{\Sigma(\mathbf{A}\,d\mathbf{s})}{dS}.$$

Подставляя сюда выражения для $d\mathbf{s}$ и $d\mathbf{S}$ в криволинейных координатах и поступая так же, как и в § **98** стр. 115 при выводе теоремы Стокса, получаем три составляющих $\operatorname{curl}\mathbf{A}$ по осям координат в данной точке:

$$\operatorname{curl}_1\mathbf{A} = \frac{1}{e_2 e_3}\left(\frac{\partial(e_3 A_3)}{\partial v} - \frac{\partial(e_2 A_2)}{\partial w}\right)$$

и т. д.

Пользуясь этими общими формулами, легко перейти к цилиндрическим и сферическим координатам.

165. Цилиндрические координаты. В этих координатах для каждой точки дается ее расстояние z от плоскости XY (рис. 43) и расстояние r от оси Z; третьей координатой служит угол φ, образуемый радиусом r с плоскостью ZX. Из чертежа видно, что формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим будут:

$$\bar{x} = r\cos\varphi, \qquad \bar{y} = r\sin\varphi, \qquad \bar{z} = z.$$

Элемент дуги

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (dz)^2.$$

Новыми координатами служат dr, $d\varphi$, dz и, следовательно,

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = r, \qquad e_3 = 1, \qquad e = r;$$

$$g_{11} = g_{33} = 1, \qquad g_{22} = r^2, \qquad |g_{ik}| = r^2.$$

Уравнение Лапласа-Пуассона будет:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

166. Сферические координаты. Положение точки в этих координатах определяется расстоянием ее до начала координат, т.-е.

сферою радиуса r и двумя углами: широтою φ и полюсным расстоянием ϑ. Таким образом формулы преобразования из картезианских координат в сферические будут:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad z = r \cos\vartheta.$$

Элемент дуги будет:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r \sin\vartheta \, d\varphi)^2 + (r \, d\vartheta)^2.$$

Новыми координатами служат dr, $d\varphi$, $d\vartheta$, а потому

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = r \sin\vartheta, \qquad e_3 = r, \qquad e = r^2 \sin\vartheta;$$

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = r^2 \sin\vartheta, \qquad g_{33} = r^2, \qquad |g_{ik}| = r^4 \sin^2\vartheta.$$

Уравнение Лапласа-Пуассона будет:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r_2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right).$$

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕНЗОРОВ.

167. Переход к n измерениям. До сих пор мы старались физическим величинам — скаларам, векторам и тензорам — давать геометрическое толкование. Мы иллюстрировали скаларное поле эквипотенциальными поверхностями и линиями градиента, векторы мы изображали в виде отрезков прямых линий, а симметричные тензоры в виде поверхностей второго порядка. Мы делали это для того, чтобы придать рассматриваемым величинам и образуемому ими физическому полю *наглядный* характер, чтобы они представлялись нам в виде определенных и привычных нам геометрических форм в доступном нашему воображению трехмерном эвклидовом пространстве.

Однако, в самое последнее время, главным образом под влиянием теории относительности Эйнштейна, замечается стремление обобщить законы физики, включив в ее уравнения время как особого рода *четвертое* измерение. Более того, оказалось необходимым сделать предположение, что это четырехмерное пространство искривляется, т.-е. что получаются отступления от эвклидовой геометрии под влиянием материи. Впрочем, и независимо от теории относительности Эйнштейна мы считаем целесообразным дать читателю краткие сведения о современной теории векторов и тензоров в неэвклидовом пространстве n измерений. Эта теория не так уж

сложна, как это может показаться при чтении некоторых специальных чисто математических сочинений, а между тем, как всякое обобщение, она значительно расширяет теоретический кругозор и с этой точки зрения несомненно полезна.

Переходя к n-мерному пространству, нам придется обобщить те формулы, которые нам уже известны для трехмерного пространства, и притом так, чтобы они давали возможность делать вычисления при любой системе координат, при любом числе измерений и даже в сверх-эвклидовом пространстве. Но, конечно, при этом придется уже пожертвовать геометрической наглядностью и ограничиться *установлением формул*, по возможности легко запоминаемых. Другими словами, нам придется *геометрическую* наглядность заменить наглядностью *формул*.

Впрочем, для того, чтобы не теряться в обобщениях, мы все же посоветовали бы читателю сравнивать эти обобщенные формулы с известными уже геометрическими соотношениями в доступном нашему воображению эвклидовом трехмерном пространстве. Считаем же мы полезным и наглядным пользоваться географическими или метеорологическими картами, т.-е. изображать на плоской бумаге то, что на самом деле происходит на кривой поверхности земного геоида и на разных высотах от уровня моря.

168. Гауссовы координаты. Для того, чтобы охарактеризовать положение какой-либо точки в n-мерном пространстве, необходимо выбрать систему координат и притом желательно выбрать ее в возможно общем виде.

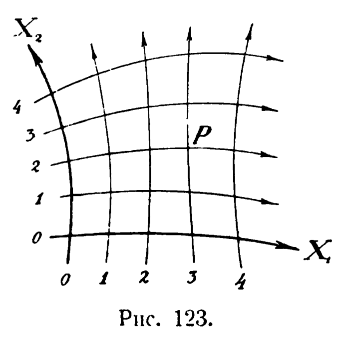


Рис. 123.

Г а у с с показал, что на любой поверхности такую обобщенную систему координат можно построить следующим образом.

Проведем на поверхности (у нас на плоскости рис. 123) систему линий X_1 какой угодно формы, и вторую систему линий X_2, тоже какой угодно формы, и перенумеруем линии каждой из этих систем. Тогда для определения положения какой-либо точки P мы можем дать два числа, например:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 3.$$

Это и будут обобщенные гауссовы координаты точки P.

Само собою разумеется, что для того, чтобы любая точка поверхности могла быть вполне определена такими двумя координатами, необходимо, чтобы линии X_1 и X_2 непрерывно следовали друг за другом, покрывая собою сплошь всю поверхность; кроме того необходимо, чтобы координатные линии не пересекались друг с другом, а с линией другого наименования пересекались только в одной точке; иначе получилась бы многозначность.

Гаусс показал, что, несмотря на такую кажущуюся произвольность в выборе формы координатных линий, тем не менее соседние клетки их находятся в известной зависимости друг от друга; и эта зависимость определяется формою (кривизною) той поверхности, на которой эти линии нанесены.

Мы не будем входить в подробности работы Гаусса, а прямо перейдем к обобщению, которое было сделано Риманом для пространства n измерений.

У Гаусса на *поверхности* наносились две системы линий; в трехмерном пространстве мы должны провести таких три системы (как, например, оси X, Y, Z, или в сферических координатах r, φ, ϑ — линии радиусов, линии широт и линии долгот и т. п.) (ср. § **40**, стр. 37); в n измерениях у нас будет n систем координатных линий. Поэтому для определения положения какой-либо точки P в n-мерном пространстве должны быть даны n чисел.

В любой точке O этого пространства мы можем провести n касательных к координатным линиям, которые образуют около точки P систему из n прямолинейных, но, вообще говоря, косоугольных координат.

В подобной системе координат некоторый элементарный вектор $d\mathbf{s}$ — элемент дуги какой-либо кривой линии, отличной от линии координат, — выразится при помощи *контравариантных* своих составляющих таким образом:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_2 dx^2 + \ldots\ldots + \mathbf{e}_n dx^n.$$

169. Преобразование координат. Положим, что в n-мерном пространстве проведены две системы гауссовых координат и для перехода от одной из них к другой дана зависимость между ними

$$\xi^i = f^i(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n),$$

где

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

или обратно

$$x^i = \varphi^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \ldots, \xi^n).$$

Эта зависимость может быть, вообще говоря, и не линейная; тем не менее зависимость между дифференциалами (весьма малыми элементами) $d\xi^i$ и dx^i будет линейной, потому что для этих малых величин мы можем пренебречь величинами второго порядка малости и положить

$$d\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f^i}{\partial x^2}dx^2 + \ldots + \frac{\partial f^i}{\partial x^n}dx^n = a^i_1\, dx^1 + a^i_2 dx^2 + \ldots = \\ = a^i_n dx^n.$$

Таких уравнений будет n при $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Коэффициенты a_k^i, как вообще для криволинейных координат, будут для каждой точки поля свои.

Точно также и обратные формулы перехода будут иметь вид:

$$dx^i = \frac{\partial\varphi^i}{\partial\xi^1}d\xi^1 + \frac{\partial\varphi^i}{\partial\xi^2}d\xi^2 + \ldots + \frac{\partial\varphi^i}{\partial\xi^n}d\xi^n = \alpha^i_1 d\xi^1 + \alpha^i_2 d\xi^2 + \ldots + \alpha^i_n d\xi^n.$$

Таких уравнений будет тоже n.

Эти последние n уравнений мы можем получить не только путем дифференцирования функции φ, но также и путем решения n линейных уравнений для $d\xi^i$. Наоборот, из этой последней системы n уравнений для dx^i мы можем получить выражение для $d\xi^i$.

Поэтому коэффициенты в этих двух системах должны быть связаны соотношениями:

$$\alpha_i^k = \frac{SD\ (a_k^i)}{|a|}, \qquad a_k^i = \frac{SD\ (\alpha_k^i)}{|\alpha|},$$

где $|a|$ означает детерминант из коэффициентов a, а знак SD означает субдетерминант.

Совершенно подобные же соотношения мы имели и в трехмерном пространстве для прямолинейных координат (стр. 158, **218**).

Мы предполагаем, что и функции f и φ, выражающие зависимость между двумя системами координат, непрерывны, т.-е. что их производные конечны и что детерминанты $|a|$ и $|\alpha|$ не равны нулю. Сами же величины a и α тоже суть функции координат.

Для тех точек, где все линии координат образуют *прямые* углы друг с другом (ортогональны), мы будем иметь:

$$\alpha_k^i = a_i^k.$$

Как и в случае трех измерений, мы имеем соотношения:

$$\sum a_i^r a_r^k = \sum a_r^i a_k^r = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k \\ 0, \text{ если } i \neq k. \end{cases}$$

170. Обозначение. Часто встречающиеся суммы из двух и более множителей, снабженных индексами, принято теперь обозначать без знака суммы. Так, например,

$$d\xi^i = \sum_k a_k^i dx^k = a_k^i dx^k.$$

При этом суммирование производится по тем индексам, которые в произведении встречаются два раза. Впрочем, мы не всегда будем пользоваться этим упрощением, а будем во избежание недоразумений писать более привычный знак суммы.

Кроме того, условились обозначать через δ_i^k смешанный тензор, которого составляющие равны единице при $i = k$ и нулю при $i \neq k$. Таким образом, мы можем написать:

$$a_i^r a_r^k = a_r^i a_k^r = \delta_i^k.$$

171. Скалар. Скаларом в поле n измерений мы называем такую величину, значение которой в какой-либо точке пространства не зависит от выбора системы координат, проходящих через эту точку. В различных точках пространства n измерений данный нам скалар может иметь различные значения, т.-е. образовать скаларное поле n измерений.

172. Вектор. Под вектором в n-мерном пространстве мы будем подразумевать совокупность n чисел — так называемых *составляющих* вектора по осям координат.

Для *контра*вариантного вектора эти числа должны преобразовываться (меняться при перемене координат) по тем же законам, как и дифференциалы координат, а для *ко*вариантного вектора по законам обратным.

Поэтому (ср. § **59**, стр. 219) сумма произведений из ко- и контравариантных составляющих двух векторов не будет изменяться при перемене координат. Это будет, следовательно, скалар.

Как видим, это определение вектора существенно отличается от того определения, которое нами было дано для трехмерного

эвклидова пространства (§ 2). Там мы изображали вектор в виде отрезка прямой линии определенной величины и определенного направления, а затем по правилам проекции (ортогональной или параллельной) мы находили составляющие этого вектора. Здесь нам даны только *составляющие* вектора в какой-либо точке поля и сказано, по каким законам эти составляющие изменяются при переходе от одной системы координат к другой в той же самой точке поля. О самом векторе пока еще ничего не говорится.

Пусть, например, составляющие какого-либо контравариантного вектора в двух системах координат будут r^i и ρ^i. Они должны преобразовываться по формулам:

$$\rho^i = a^i_k r^k; \qquad r^i = \alpha^i_k \rho^k,$$

где коэффициенты a^i_k и α^i_k те же, что и в параграфе **160** стр. 220.

Для ковариантного вектора имеем наоборот

$$\rho_i = \alpha^i_k r_k; \qquad r_i = a^i_k \rho_k.$$

Произведение этих векторов дает:

$$\sum r^i r_i = \sum \rho^i \rho_i = \text{Scalar}.$$

Данное нами выше определение вектора совершенно не затрагивает и оставляет открытыми следующие два вопроса.

Во-первых, каким образом по составляющим вектора мы можем определить *скалярную* величину самого вектора, и

во-вторых, как будут изменяться составляющие вектора при перенесении его *параллельно* самому себе в соседнюю точку пространства, и что означает, вообще, *параллелизм* двух векторов, которые даны только своими составляющими.

Оба эти вопроса мы разберем ниже.

173. Метрика. Итак нам необходимо прежде всего установить правило, каким образом по составляющим какого-либо вектора определить его скалярную *величину*. Типичным вектором у нас будет служить элемент дуги ds, какой-либо кривой линии. Длина элемента ds определяется по его составляющим dx^i по формуле (стр. 215, **157**)

$$(ds)^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k = g_{ki} dx^i dx^k,$$

где индексы i и k должны пройти все значения $1, 2, 3 \ldots, n$.

Кроме того,

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Если значения g_{ik} даны для всех точек n-мерного пространства, то по вышенаписанной формуле мы можем вычислить длину элемента линии ds, которая дана нам только своими составляющими dx^i.

Таким образом тензор g_{ik} устанавливает *метрику* (т.-е. способ измерения любой линии ds) n-мерного пространства, а потому он носит название *метрического* или *основного* тензора пространства.

Точно также условимся под *величиною* какого-либо вектора, данного своими составляющими A^i, подразумевать скалар A, определяемый совершенно такою же формулую

$$(\mathbf{A})^2 = g_{ik}A^iA^k,$$

с теми же коэффициентами $g_{ik} = g_{ki}$.

Далее условимся *скаларное произведение* двух векторов

$$(\mathbf{AB}) = AB \cos (\mathbf{AB})$$

определять формулою

$$(\mathbf{AB}) = g_{ik}A^iB^k.$$

Эта формула при $A = B = 1$ определяет и величину косинуса угла между двумя векторами в данной точке n-мерного пространства; предыдущая формула для величины вектора есть ее частный случай.

Для какой-либо данной точки обе величины $(\mathbf{A})^2$ и $(\mathbf{AB})$, как *скалары,* остаются, конечно, неизменными при любой перемене системы координат. Но в другой точке поля значения g_{ik} будут, вообще говоря, иные, да и составляющие A^i и B^k при той же величине $\mathbf{A}$ могут быть другие, только *вид* формулы $(\mathbf{AB})$ остается неизменным.

174. Пример. Для того, чтобы уяснить, себе каким образом составляющие одного и того же вектора могут быть для разных точек поля разные, мы возьмем пример в двух измерениях.

На поверхности шара при координатах широты φ и полюсного расстояния ϑ, которые образуют перпендикулярную друг к другу (ортогональную) систему координат, мы получим:

$$(ds)^2 = (r \sin \vartheta d\varphi)^2 + (rd\vartheta)^2 = r^2 \sin^2\vartheta . (d\varphi)^2 + r^2(d\vartheta)^2.$$

В этом случае

$$g_{11} = r^2 \sin^2\vartheta, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{12} = 0.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что составляющая ds по координате φ равна $r \sin\vartheta\, d\varphi$; это есть функция координаты ϑ, а потому для различных точек пространства один и тот же вектор будет иметь различные величины этой составляющей.

На последнем примере мы, между прочим, видим, что по одним составляющим вектора, т.-е. по $d\varphi$ и $d\vartheta$, еще нельзя определить самого вектора ds, а необходимо, кроме того, дать *метрику* пространства, т.-е. все g_{ik} в рассматриваемом поле. На плоскости, на шаре, на эллипсоиде — везде будет своя метрика, и по этой метрике мы можем даже до некоторой степени судить о свойствах этих поверхностей.

175. Переход от ко- к контравариантам. Из формулы для

$$(ds)^2 = \sum_k \left(\sum_i g_{ik} dx^i\right) dx^k = \text{Scalar},$$

которая дает *неизменяющийся* от перемены координат *скалар,* мы видим, что при перемене координат вектор

$$\sum_i g_{ik} dx^i$$

должен преобразовываться по формулам, обратным чем dx^k. Отсюда заключаем, что этот вектор ковариантный, т.-е.

$$dx_k = \sum_i g_{ik} dx^i.$$

Значит, переход от ко- к контравариантным составляющим одного и того же вектора происходит при помощи того же метрического тензора g_{ik}.

Для обратного перехода необходим обратный тензор g^{ik}. Соотношения между g_{ik} и g^{ik} совершенно аналогичны тем соотношениям, которые мы имели в трехмерном пространстве.

176. Тензоры. Мы уже имели пример симметричного тензора g_{ik}; его составляющие были коэффициенты в сумме произведений dx^i и dx^k контравариантных составляющих вектора ds.

Подобные суммы произведений называются *квадратичными* формами, потому что в каждом их члене имеется произведение из *двух* составляющих вектора $dx^i dx^k$. Всякая подобная форма представляет собою *скалар*. На этом обстоятельстве можно основать определение тензора.

Более общий случай представляет *билинейная* форма, состоящая из членов вида $a_{ik}x^iy^k$.

Тензором второго порядка в n-мерном пространстве называется совокупность n^2 коэффициентов билинейной *скалярной* формы, составленной из двух любых векторов A^i и B^i. Если эти векторы контравариантны, то тензор будет ковариантным; если векторы ковариантны, то тензор назовется контравариантным.

Это последнее обстоятельство вытекает прямо из того, что произведение должно быть скаларом, т.-е. не меняться от преобразования координат.

Итак, мы имеем два тензора T_{ik} и T^{ik} второго порядка, если они с *любыми* двумя векторами дают

$$\sum T_i^k A^i B^k = \text{Scalar}, \quad \sum T^{\cdot k} A_i B_k = \text{Scalar}.$$

Кроме того, мы можем составлять произведения из ко- и контравариантных векторов. Тогда в билинейной форме

$$\sum T_i^k A^i B_k = \text{Scalar}$$

мы будем иметь *смешанный* тензор T_i^k, ковариантный по указателям i и контравариантный по указателям k.

Эти же формулы устанавливают правила, как должны преобразовываться n^2 чисел T_{ik}, T^{ik} или T_i^k при перемене координат. Очевидно, T_{ik} преобразуется, как произведения из двух ковариантных векторов, T^{ik}, как произведения из двух контравариантных векторов, и T_i^k, как произведения ко- и контравариантных векторов т.-е. как A_1B^1, A_1B^2, A_1B^3 и т. д.

Далее, если в формулах для T_{ik} мы заменим

$$A^i = \sum_l g^{il} A_l,$$

то получим:

$$\sum_k T_{ik} \left(\sum_l g^{il} A_l\right) B^k = \sum_k \left(\sum_l g^{\cdot l} T_{ik}\right) A_l B^k.$$

При этом в скобках у нас, очевидно, получился смешанный тензор

$$T_k^i = \sum g^{il} T_{l_k}.$$

Из этого мы видим, что перенос указателей у тензора вверх или вниз (контра- и ковариантность) достигается при помощи того же метрического тензора g^{ik}, как и для векторов.

177. Тензоры высших порядков. До сих пор мы под тензором подразумевали величины, которые имеют девять составляющих и преобразуются, как квадраты и произведения координат. Однако еще в § **156**, стр. 113, мы указали, что можно основать классификацию всех различных, встречающихся в физике величин по тому признаку, как они преобразуются при переходе от одной системы координат к другой. При такой классификации можно вообще все величины называть тензорами, но прибавлять — первого, второго и т. д. порядка, смотря по тому, преобразуются ли они, как первые, или как вторые и т. д. степени координат.

Тогда мы получим следующее:

Скалары остаются при преобразовании координат неизменными, они совсем не преобразуются, и их можно называть тензорами *нулевого* порядка.

Векторы преобразуются, как координаты: это будут тензоры *первого* порядка.

Те величины, которые мы раньше называли просто *тензорами* и которые преобразуются, как вторые степени координат, мы теперь должны назвать *тензорами второго* порядка.

Обобщая эту классификацию дальше, мы можем определить тензоры третьего, четвертого и т. д. порядка.

Так, например, если мы напишем трилинейную форму, составленную из трех контравариантных векторов A^i, B^k, C^m, и если значение суммы произведений

$$\sum T_{ikm} \; A^i B^k C^m = \text{Scalar}$$

не меняется при преобразовании координат, тогда, очевидно, коэффициенты этой формы T_{ikm} должны преобразовываться противоположно произведениям $A^i B^k C^m$. Значит, эти коэффициенты должны преобразовываться, как произведения трех ковариантных векторов $A_i B_k C_m$.

Число этих коэффициентов будет n^3.

На основании этого мы можем установить такое определение. Ко- или контравариантным тензором третьего порядка мы называем совокупность n^3 величин, которые преобразуются при перемене координат, как произведения из трех ко- или контравариантных векторов.

Продолжая таким образом далее, мы можем получить любые контравариантные, ковариантные и смешанные тензоры четвертого, пятого и т. д. порядка; число составляющих в каждом из них будет n^4, n^5 и т. д. Формулы их преобразования вполне определены, если только установлены формулы преобразования контравариантных координат.

Если же дана и метрика пространства, т.-е. тензоры g^{ik} и g_{ik}, то и все переходы от ковариантных тензоров к контравариантным и наоборот — тоже определены.

Резюмируя и обобщая все, что мы сказали выше, мы можем дать такое общее определение.

Совокупность n^m чисел

$$T_{ikl\dots}^{\lambda\mu\nu\dots}$$

где $i,\ k,\ l, \dots\ \lambda,\ \mu,\ \nu, \dots = 1, 2, 3, \dots, n$, а число индексов m, — мы называем *тензором m-го порядка*, ковариантным по индексам $i, k, l, \dots$ и контравариантным по индексам $\lambda, \mu, \nu, \dots$, при условии, что эти числа образуют с любыми m векторами сумму произведений вида:

$$\sum T_{ikl\dots}^{\lambda\mu\nu\dots} A^i B^k C^l \dots L_\lambda M_\mu N_\nu \dots = \text{Scalar},$$

значение которой не меняется при преобразовании координат, которая, следовательно, представляет собою *скалар*.

Легко видеть, что из произведений тензоров низшего порядка можно получить тензоры более высокого порядка. Умножение на скалар (тензор нулевого порядка) не меняет порядка тензора.

178. Сокращение индексов. Положим, нам дан смешанный тензор третьего порядка $T_{\mu\nu}^{\lambda}$ и пусть при перемене координат его составляющие будут $\overline{T}_{\mu\nu}^{\lambda}$. В обеих системах координат должно иметь место равенство:

$$\sum T_{\mu\nu}^{\lambda} A_\lambda B^\mu C^\nu = \sum \overline{T}_{\mu\nu}^{\lambda} \overline{A}_\lambda \overline{B}^\mu \overline{C}^\nu$$

при чем векторы

$$A_\lambda,\ B^\mu,\ C^\nu$$

преобразовались в векторы

$$\overline{A}_\lambda,\ \overline{B}^\mu,\ \overline{C}^\nu.$$

Подставим в правую часть этого равенства формулы преобразования для векторов $\overline{A}_\lambda$ и $\overline{B}^\mu$:

$$\overline{A}_\lambda = \sum_i \alpha_\lambda^i A_i,\quad \overline{B}^\mu = \sum_k a_k^\mu B^k;$$

получаем:

$$\sum_{\lambda\mu\nu}\left(T_{\mu\nu}^\lambda C^\nu\right) A_\lambda B^\mu = \sum_{\lambda\mu\nu}\left(\overline{T}_{\mu\nu}^\lambda \overline{C}^\nu\right) \alpha_\lambda^i a_k^\mu A_i B^k.$$

Но так как A_i и B^k — *любые* векторы, то должны иметь место равенства:

$$\sum\left(T_{\mu\nu}^\lambda C^\nu\right) = \sum\left(\overline{T}_{\mu\nu}^\lambda \overline{C}^\nu\right) \alpha_\lambda^i a_k^\mu.$$

Таких равенств для разных λ и μ мы будем иметь n^2.

Мы можем их расположить в квадратной таблице, как детерминант. Если теперь сложить n равенств, стоящих по диагонали этой таблицы, то там λ будет равна μ, а потому

$$\sum \alpha_\lambda^i a_k^\lambda = 1,$$

откуда видим, что

$$\sum T_{\lambda\nu}^\lambda C^\nu = \sum \overline{T}_{\lambda\nu}^\lambda \overline{C}^\nu = \text{Scalar}.$$

Это значит, что тензор $T_{\lambda\nu}^\lambda$ преобразуется, как ковариантный вектор. Таким образом путем суммирования по диагонали мы получили тензор на *два* порядка ниже.

Формально это достигается сокращением равных индексов

$$T_{\lambda\nu}^\lambda = T_\nu.$$

Это правило применимо к тензорам любого порядка.

179. Пример. Мы знаем, что

$$\sum A_i B^k = T_i^k$$

есть смешанный тензор второго порядка. Если суммировать только при $i = k$, то, как известно,

$$\sum A_i B^i = \text{Scalar};$$

получаем скалар, т.-е. тензор на два порядка ниже, чем T_i^k.

180. Производные. Если брать производные по времени от какого-либо тензора, то при этом порядок его не меняется. Так, например, вектор $\mathbf{r}$ остается вектором, обращаясь в скорость

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Несколько иначе дело обстоит с частными производными по координатам.

Так, например, для скалара φ имеем:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} dx^n = (\text{grad}\, \varphi \cdot d\mathbf{s}).$$

В этой сумме из произведений $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ на dx величины dx^i суть составляющие *контравариантного* вектора; а так как $d\varphi$ скалар, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ должны быть составляющие *ковариантного* вектора. Этот вектор мы уже встречали в трехмерном пространстве (**§ 62,** стр. 60); мы назвали его градиентом поля и обозначали

$$\mathbf{G} = \text{grad}\, \varphi = \nabla \varphi.$$

Из этого мы видим, что формально можно оператор Гамильтона ∇ считать за ковариантный вектор с составляющими $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Если сочетать гамильтонов вектор с каким-либо настоящим вектором, например $\mathbf{v}$, как будто это два множителя, то, очевидно, получим тензор второго порядка

$$T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i} v_k.$$

Этот тензор второго порядка может быть ковариантным (как у нас написано) или смешанным, смотря по тому, каков вектор $\mathbf{v}$: ко- или контравариантный.

В последнем случае можно смешанный тензор сократить, взяв сумму произведений с равными индексами, т.-е. написать:

$$T_i^k = \frac{\partial}{\partial x^i} v^k,$$

$$\sum T_i^i = \Sigma \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \text{Scalar}.$$

Таким путем мы получили расхождение вектора $\mathbf{v}$, т.-е. скалар.

Совершенно то же самое получаем и при тензорах более высокого порядка.

Общее правило таково: операция grad повышает порядок тензора на единицу, а операция div понижает тоже на единицу.

По этому поводу напоминаем читателю § 71, стр. 70. Здесь при прямоугольных координатах разница между ко- и контравариантными составляющими пропадает, они становятся тождественными. Поэтому всякий тензор можно считать за смешанный и получать из него тензор двумя порядками ниже сокращением рядом стоящих индексов.

Мы так и делали.

Сперва мы в скалярном поле получили поле вектора

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Затем получили поле тензора T_i^k с составляющими

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

и т. д.; наконец, мы сложили диагональные составляющие этого тензора, т.-е. сократили тензор, положив $i=k$, что дало нам скалар

$$\nabla^2 \varphi = \text{grad} \cdot \text{grad} \cdot \varphi = -4\pi\rho.$$

В теоретической физике часто встречаются случаи (теория упругости, электростатика и т. д.), когда этот процесс применения операций grad и сокращение индексов продолжается еще далее. Так, например, из тензора второго порядка p_{ik} давлений в упругом теле (p_{xy} означает составляющую по оси X давления на площадку, которой нормаль параллельна оси Y) путем дифференцирования мы получаем тензор третьего порядка

$$T_{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^l} p_{ik}.$$

При картезианских координатах этот тензор можно считать смешанным и сократить по индексам i и l, т.-е. составить суммы при $i=l$. Так как индекс k должен быть x, y, z, то у нас получатся три суммы:

$$\text{div}\, p_{xx}x, \quad \text{div}\, p_{xy}y, \quad \text{div}\, p_{xz}z.$$

Это будут составляющие по осям координат вектора силы, отнесенной к единице объема.

Действительно, p_{ik} суть *давления*, т.-е. силы на единицу поверхности, а разделенные еще на dx^l — представляют собою силы на единицу объема. В этом примере мы тоже видим, как из тензора *третьего* порядка путем сокращения получился *вектор*, т.-е. тензор *первого* порядка.

181. Параллельное перемещение вектора. Представим себе на плоскости прямолинейные координаты X_1, X_2, и пусть некоторый вектор A перемещается из точки P в точку P', оставаясь себе параллельным (рис. 124). При этом его составляющие по осям координат X_1 и X_2 останутся неизменными.

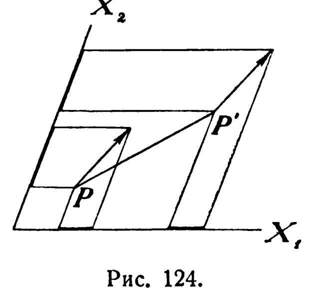


Рис. 124.

Если же вместо прямолинейных координат взять какие-нибудь криволинейные, то при перемещении вектора параллельно самому себе его составляющие могут измениться.

Для того, чтобы это было яснее, возьмем на плоскости круговые координаты (рис. 125), и пусть некоторый вектор A, приложенный к точке P, лежит вдоль по оси X_1. Его составляющие по r и α будут:

$$A_r = PA, \qquad A_\alpha = 0.$$

Переместим этот вектор в положение P' параллельно самому себе. После такого перемещения его составляющая по радиусу-вектору уже не будет PA', а будет равна $PA' \cos \alpha$. Точно также изменится и другая составляющая A_α; она не будет больше равна нулю, а будет равна углу $(\alpha - \beta)$.

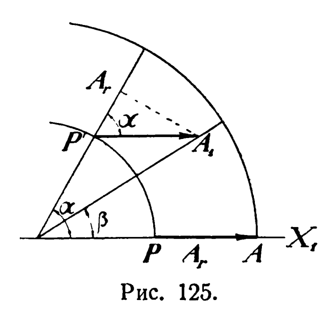


Рис. 125.

Из этого примера мы уже видим, что, зная только *составляющие* вектора для двух соседних точек P и P', мы еще не можем судить о том, передвинулся ли вектор параллельно самому себе или он при этом переменил свое направление.

На плоскости этот вопрос решается очень просто: проводят какую-либо *прямолинейную* систему координат и наблюдают за составляющими вектора по этим осям; если составляющие остались неизменными, то вектор переместился параллельно самому себе. Несколько сложнее дело обстоит на неплоской, кривой поверхности; на ней совсем нельзя провести прямолинейных координат. Поэтому для решения вопроса о параллельности векторов приходится выйти из кривой поверхности в третье измерение. Однако, как увидим ниже, и трехмерное пространство может быть тоже кривым, т.-е. не подчиняться законам эвклидовой геометрии.

Как же быть при n-мерном пространстве?

Для того, чтобы в n-мерном пространстве термин *параллельное перемещение* вектора получило определенный смысл, условимся считать, что вектор переместился параллельно самому себе, если в некоторой определенной системе координат его составляющие, несмотря на перемещение, остались неизменными. Как увидим ниже, такое определение возможно, если ограничиться бесконечно малыми перемещениями; выяснится также, какую именно систему координат нужно выбрать для определения параллельности.

Предположим на время, что такая система координат нашлась и что при перемещении из P в P', равном ds, изменение всех составляющих вектора равно нулю, т.-е.

$$dA^i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Проведем теперь какую-нибудь другую систему координат. Для этой другой системы, как это мы видели выше в примере круговых координат на плоскости, параллельное перемещение вектора может сопровождаться изменением всех его составляющих. Выведем формулы для этого изменения.

Пусть формулы преобразования координат опять будут:

$$\xi^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n);$$

$$x^i = \varphi^i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n),$$

а для $d\xi^i$ и dx^i будем иметь:

$$d\xi^i = \sum_k \frac{\partial f^i}{\partial x^k} dx^k;$$

$$dx^i = \sum_k \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^k} d\xi^k.$$

Если взять какой-либо контравариантный вектор A^i, то его составляющие будут преобразовываться по формулам:

$$A^i = \sum \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^k} \overline{A}^k = \sum \alpha^i_k \overline{A}^k,$$

где $\overline{A}^k$ — составляющие вектора в координатах ξ^k.

Изменение вектора A^i при переходе в соседнюю точку будет:

$$dA^i = d\sum \alpha^i_k \overline{A}^k = \sum \alpha^i_k d\overline{A}^k + \sum d(\alpha^i_k) \overline{A}^k.$$

Если теперь принять, что в системе координат ξ^k составляющие вектора не изменились и $d\overline{A}^k = 0$, то в другой системе мы получим:

$$dA^i = \sum_k d(\alpha^i_k) \overline{A}^k = \sum_{km} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \xi^k \partial \xi^m} \overline{A}^k d\xi^m.$$

Подставим в эту формулу $\bar{A}^k$ и $d\xi^m$, выраженные через A^k и через dx^k. Обе эти подстановки будут линейные, и, следовательно, dA^i выразятся как сумма произведений $A^k d\xi^m$ с коэффициентами, которые мы обозначим Γ^i_{km}. Здесь верхний индекс указывает на составляющую dA^i, а нижние оба показывают, по каким индексам суммируются произведения:

$$dA^i = \sum \Gamma^i_{km} A^k dx^m, \qquad k, m = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Таких уравнений мы получим n, а с правой стороны каждого из них мы будем иметь n^2 членов; из них некоторые будут иметь одинаковые коэффициенты, потому что $\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$, как это следует из их образования.

Для каждой данной точки поля и для каждой выбранной системы координат Γ^i_{km} будут иметь определенное значение. Для той системы, где $dA^i = 0$, очевидно, все Γ^i_{km} будут тоже равны нулю. Это последнее обстоятельство указывает нам, что Γ^i_{km} не тензор, потому что, если бы тензор имел в какой-либо системе координат все составляющие равными нулю, то они и после любого преобразования координат остались бы нулями.

Ниже мы определим значение этих коэффициентов Γ подробнее и дадим для них формулы; но сейчас нам достаточно знать, что они определяют изменения составляющих вектора при его параллельном перемещении. Мы доказали, что *если* существует такая система координат, для которой составляющие передвинутого на длину ds вектора не меняются, то для других систем имеет место соотношение:

$$dA^i = \sum_{km} \Gamma'^i_{km} A^k dx^m.$$

Это соотношение называется *аффинной* связью точки P с ее соседними точками, находящимися на расстоянии ds; величины Γ'^i_{km} называются коэффициентами этой аффинной связи.

Легко доказать и обратную теорему: *если* дана аффинная связь, т. е. Γ^i_{km} в данной точке, то всегда можно найти такие координаты, для которых $dA^i = 0$.

Действительно, стоит только положить

$$x^i = \varphi^i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = \xi^i + \frac{1}{2}\sum_{km} \Gamma^i_{km}\xi^k\xi^m.$$

Тогда для начала координат, где $\xi^i = 0$, получим:

$$a^i_k = \frac{\partial\varphi^i}{\partial\xi^k} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial\xi^k\partial\xi^m} = \Gamma^i_{km},$$

и для какого-либо вектора A^k, а также и для dx^m имеем:

$$A^k = \sum_m a^i_m \bar{A}^m = \bar{A}^k; \qquad dx^m = d\xi^m.$$

Далее

$$\sum_m \Gamma^i_{km}\, dx^m = \sum_m \frac{\partial^2\varphi^i}{\partial\xi^k\partial\xi^m}\, d\xi^m = d\left(a^i_k\right),$$

и, следовательно,

$$dA^i = \sum_k d\left(a^i_k\right)\bar{A}^k.$$

Сравнивая это с общею формулою

$$dA^i = \sum_k a^i_k d\bar{A}^k + \sum_k d\left(a^i_k\right)\bar{A}^k,$$

мы видим, что, действительно, выбранные нами новые координаты удовлетворяют условию $\overline{dA^k} = 0$.

182. Метрика смещенных векторов. Каким же образом установить аффинную связь соседних точек поля?

Для этого мы воспользуемся выражением для скалярной величины вектора A

$$(A)^2 = \sum_{ik} g_{ik}A^iA^k,$$

которая в предыдущем параграфе у нас еще не играла никакой роли; мы ведь говорили исключительно о *составляющих* вектора, а не о нем самом. Теперь мы можем добавить еще требование, чтобы вектор при параллельном перемещении не изменял своей *скалярной величины.*

Покажем, что это условие совершенно достаточно для установления аффинной связи.

Необходимо, однако, оговориться, что подобное требование с точки зрения обычной геометрии вполне естественно, но с более общей точки зрения является ограничением, которое мы впоследствии откинем.

Однако сейчас мы примем, что при параллельном перемещении вектора A

$$d(A)^2 = \sum (dg_{ik}A^i.A^k + g_{ik}dA^i.\, A^k + g_{ik}A^i.\, dA^k) = 0.$$

Если подставить сюда вместо

$$dg_{\mu\nu} = \sum \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}\, dx^i; \qquad dA^\rho = \sum_{i\nu} \Gamma^\rho_{\mu\nu}\, dx^i A^\nu$$

и расположить соответственным образом множители, то получим:

$$\sum_{i\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} + \sum_\rho g_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{i\nu} + \sum_\sigma g_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{i\mu} \right) dx^i A^\mu A^\nu = 0.$$

Это уравнение должно иметь место для любого вектора A^ν и для любого перемещения dx^i. Отсюда заключаем, что коэффициенты этой суммы, стоящие в скобках, должны независимо от значения множителей равняться нулю. Из полученных таким образом $i\mu\nu$ уравнений мы можем определить Γ, например, следующим образом: напишем значение производных от $g_{\mu\nu}$, переставляя индексы i, μ, ν

$$\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^\nu} = - g_{i\rho}\, \Gamma^\rho_{\nu\mu} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu i};$$

$$\frac{\partial g_{\nu i}}{\partial x^\mu} = - g_{i\rho}\Gamma^\rho_{\mu i} - g_{i\sigma}\, \Gamma^\sigma_{\mu\nu};$$

$$-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} = + g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{i\nu} + g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{i\mu}.$$

Во всех членах правой части здесь подразумевается суммирование по дважды встречающимся значкам. Взяв полусумму этих трех равенств, обозначив ее через $\begin{bmatrix} \mu\nu \\ i \end{bmatrix}$ и приняв еще во внимание, что $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ симметричны относительно нижних индексов, т.-е. что $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ и $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}$, получаем:

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{i}}\right) = -\sum_{\sigma} g_{i\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}.$$

Эти уравнения линейны относительно $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, а коэффициентами в них служит метрический тензор $g_{i\sigma}$. Поэтому, решая их относительно $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, получим опять такие же уравнения, только с коэффициентами $g^{i\sigma}$:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = -\sum g^{i\sigma}\begin{bmatrix} \mu\nu \\ i \end{bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ i \end{Bmatrix}.$$

Встречающиеся здесь символы $\begin{bmatrix} \mu\nu \\ i \end{bmatrix}$ и $\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ i \end{Bmatrix}$ называются символами Кристоффеля; для того чтобы отличать их, им даны названия символов Кристоффеля первого и второго рода.

Резюмируя вместе все то, к чему мы пришли в последних двух параграфах, мы можем сказать следующее.

Если в данном нам n-мерном пространстве поля установлена метрика не только в каждой точке (g_{ik}), но и метрическая связь в соседних точках ($d(A)^2 = 0$), то тем самым установлена *аффинная* связь соседних точек $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, и мы всегда можем найти такую систему координат и переместить вектор A^i так, что в этих новых координатах все составляющие вектора останутся неизменными. Такое смещение вектора называется *параллельным* смещением вектора.

Заметим еще, что если для двух векторов A^i и B^i при их параллельном смещении

$$d(A)^2 = 0$$

и

$$d(B)^2 = 0,$$

то и

$$d(AB) = 0\ ^{1}).$$

---

[1]) Доказательство читатель легко найдет, если рассмотрит выражение $d(A+B)^2$.

Другими словами, угол, образуемый двумя параллельно самим себе смещенными векторами остается при таком смещении *неизменным*. Так оно и должно быть.

Мы знаем, что для трехмерного эвклидова пространства та система координат, в которых параллельному смещению вектора соответствует $dA^i = 0$, есть система *прямолинейных* координат.

Мы сейчас увидим, что в более общем случае, в неэвклидовом (гак сказать, кривом) пространстве такими координатами служат *геодезические линии*, т.-е. линии кратчайших расстояний.

В частном случае эвклидова n-мерного пространства, где кривизна равна нулю, эти линии кратчайших расстояний обращаются в прямые.

183. О вариационном исчислении. Прежде чем приступить к определению линий кратчайших расстояний в n-мерном пространстве, мы считаем полезным, хотя вкратце, напомнить читателю приемы вариационного исчисления.

Большею частью приходится применять вариационное исчисление при решении задач следующего рода.

Дана некоторая функция координат x^i, затем производных этих координат по некоторому параметру t (например по времени) $\dot{x}^i$ и, наконец, самого параметра t. Мы можем изобразить эту функцию знаком

$$L(t, x^1, x^2, \ldots, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots) = L(t, x^i, \dot{x}^i),$$

где

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такие соотношения между координатами и параметром t, чтобы значение интеграла

$$\int_{t_1}^{t_i} L(t, x^i, \dot{x}^i)\, dt = \text{extremum},$$

взятого между пределами t_1 и t_2, было maximum или minimum т.-е. вообще — extremum.

Как увидим ниже, кроме этого могут быть прибавлены еще некоторые дополнительные условия.

Обозначим искомые соотношения, т.-е. искомую функцию через

$$x^i = f^i(t).$$

Таких уравнений должно быть у нас столько же, сколько зависимых переменных x^i, т.-е. всего n. Они будут представлять собою уравнения линии в n-мерном пространстве, написанные в параметрической форме с параметром t.

Для наглядности читатель может представить себе, что параметр t есть *время* и что вдоль каждой линии координат движется по точке, согласно одному из вышенаписанных уравнений. Одновременно с этим в пространстве будет двигаться некоторая точка P (рис. 126) и описывать линию, для которой $x^i = f^i(t)$ будут параметрические уравнения.

t_2 δx^i P_1 P t_1

Рис. 126.

Конечно, вместо времени t мы можем взять любой другой параметр, например длину пройденного точкою пути s и т. п.

Рассмотрим предварительно, как вообще определяют maximum или minimum какой-либо данной функции.

Пусть, например, нам дана кривая $y = f(x)$.

Положительное значение дифференциала

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

означало бы, что ордината y *растет* при переходе к соседним точкам кривой по направлению $+dx$. Но если мы дойдем до такой точки P_0, в которой dy из положительного значения переходят в отрицательное, т.-е. ордината начинает убывать, то, очевидно, это будет указывать, что мы стали переходить через maximum y. Аналогическое явление будем иметь и для minimum. Поэтому вообще для отыскания точки extremum нам необходимо положить

$$dy = 0,$$

т.-е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Если наша функция зависит от нескольких переменных x^i, то мы должны будем для extremum написать условие:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n = 0.$$

Если все dx^i могут быть взяты *произвольно,* т.-е. между ними не дано никакой зависимости, тогда, очевидно, наше уравнение распадется на n независимых уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0.$$

Решение этих уравнений и определяет координаты x^i той точки P_0, для которой наша функция f получает экстремальное значение.

Впрочем, довольно часто бывают даны еще добавочные условия, как, например: найти extremum функция f при условии, чтобы некоторая функция φ оставалась постоянной:

$$\varphi(x^i) = \text{Const.}$$

Тогда в вышенаписанном уравнении величины dx^i уже не будут независимы друг от друга, а должны удовлетворять еще условию:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} dx^n = 0.$$

Для того, чтобы удовлетворить и этому добавочному условию, пользуются методом неопределенных множителей Лагранжа. Умножая это последнее уравнение на λ и прибавляя к уравнению для dy, получаем:

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) dx^i = 0.$$

Теперь величины dx^i опять стали *независимы* друг от друга, или, иначе говоря, их зависимость уже принята нами во внимание введением коэффициента λ, а потому наше уравнение опять распадается на n уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0; \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

которые вместе с данным нам уравнением $\varphi(x^i) = \text{Const.}$ представляют собою $n+1$ уравнений для определения всех x^i и еще λ.

Отсюда и определяются все координаты x^i, соответствующие extremum $f(x^i)$ при условии, что $\varphi(x^i) = C$.

Нечто иное мы имеем в поставленной выше задаче вариационного исчисления, где функции $f^i(x^i)$ сами по себе не даны, а требуется определить их вид, и притом так, чтобы данный нам интеграл принял экстремальное значение.

Однако, несмотря на такое различие, и для таких задач математикою выработаны аналогичные приемы.

Вместо того, чтобы переходить к *соседним точкам*, т.-е. *дифференцировать*, как это мы делали для определения extremum, мы теперь будем переходить к *соседним функциям*, т.-е. *вариировать*. Делается это следующим образом.

Заменим нашу линию в n-мерном пространстве

$$x^i = f^i(t)$$

другой линией, бесконечно мало от нее отличающейся, положив

$$x^i = y^i + \varepsilon\xi^i.$$

Здесь ε — бесконечно малая величина, а ξ^i — некоторая функция параметра t.

Посмотрим, какое это вызовет изменение, т.-е. *вариацию* в нашем интеграле

$$F = \int_{t_i}^{t_2} L(t, x^i, \dot{x}^i)\,dt.$$

Определение *вариации* δF интеграла делается совершенно так же, как мы определяли прежде полный дифференциал. Необходимо только иметь в виду, что теперь производные нужно брать по ε.

При этом пределы интеграла мы будем принимать постоянными, а x^i и $\dot{x}^i$ мы должны считать за функции от ε. В таком случае мы получим:

$$x^i = y^i + \varepsilon\xi^i, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial\varepsilon} = \xi^i,$$

$$\dot{x}^i = \dot{y}^i + \varepsilon\dot{\xi}^i, \qquad \frac{\partial\dot{x}}{\partial\varepsilon} = \dot{\xi}^i.$$

Приняв все это во внимание и приравняв $\delta F=0$ с целью найти extremum, подобно тому как мы и раньше приравнивали $df=0$, получаем:

$$\delta F=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,.\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\xi^i+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{\xi}^i\right)\varepsilon\,.\,dt=0.$$

Вторые члены в скобках можно преобразовать так:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{\xi}^i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\xi^i\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\xi^i.$$

Первый член справа можно непосредственно интегрировать по t, и тогда получаем:

$$\delta F=\left|\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\xi^i\right|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\xi^i\varepsilon dt=0.$$

Так как границы t_1 и t_2 у нас неизменны, то для них все ξ^i должны равняться нулю, и первый член пропадает.

Далее, если все ξ^i независимы друг от друга, т.-е. могут быть выбраны *произвольно*, то наше равенство распадается на n уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}=0,\qquad i=1,2,3,\ldots,n.$$

Таким образом наша задача привела нас к системе дифференциальных уравнений с частными производными. Эти уравнения называются уравнениями Эйлера - Лагранжа и определяют собою целое семейство кривых линий, называемых *экстремалями*. Одна из этих экстремалей проходит через точки t_1 и t_2 и делает значение интеграла F maximum или minimum, вообще — extremum, т.-е. решает нашу задачу.

Предположим, что в рассматриваемой задаче так же, как и в рассмотренной нами раньше, имеются еще добавочные условия. Пусть, например, требуется, чтобы

$$\int_{t_1}^{t_2}H\,dt=C.$$

Тогда опять можно применить метод неопределенных множителей, и вместо extremum интеграла F ищут extremum интеграла от функции $(L+\lambda H)$.

В таком случае необходимо, чтобы

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(L+\lambda H)\,dt=0.$$

Разница только в том, что в этом случае вместо функции L у нас появилась функция $L+\lambda H$. Множитель λ определяется по условиям на границах.

С применением этих способов вариационного исчисления мы встретимся в механике.

184. Геодезические линии. По только что указанному способу определим условия extremum интеграла

$$s=\int_1^2 ds=\int_1^2\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$$

(где под корнем нужно подразумевать *сумму* по i и k), т.-е. определим форму кратчайшего пути между двумя точками 1 и 2 n-мерного пространства.

За независимый параметр мы возьмем *длину* этого пути, s, и тогда мы можем положить:

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial s}ds=\dot{x}^i ds,$$

$$s=\int_1^2\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\,.\,ds.$$

Знак суммы мы опускаем. В подъинтегральной функции величины g_{ik} зависят от координат x^i, но не зависят от $\dot{x}^i$. Составим уравнения Эйлера-Лагранжа.

Для этого вычислим сначала производные по координатам:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right)^{\frac{1}{2}};\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu.$$

Первый множитель в скобках представляет собою $(ds)^2$, деленное на $(ds)^2$, т.-е. равен единице. Для индексов мы взяли другие обозначения, чтобы не спутать, что μ и ν должны в указанной сумме принимать всевозможные значения, между тем как i есть номер уравнения и по нему не суммируется. На тех же основаниях

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \sum_{\mu} g_{i\mu} \dot{x}^{\mu}.$$

Если от этого выражения брать полную производную по s, то надо иметь в виду, что $g_{i\mu}$ суть функции x^i и x^{μ}, которые, в свою очередь, — функции параметра s. Поэтому

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \sum_{\mu} g_{i\mu} \ddot{x}^{\mu} + \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^{\nu}} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}.$$

Последнее суммирование мы можем разложить на две полусуммы для того, чтобы после вычитания из них вычисленной выше производной по координатам получить знакомое нам выражение Кристоффеля:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu i}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i} \right) = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ & i \end{bmatrix}.$$

После этого уравнения Эйлера-Лагранжа для геодезической линии примут вид:

$$\sum_{\mu} g_{\mu i} \ddot{x}^{\mu} + \sum_{\mu, \nu} \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ & i \end{bmatrix} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0.$$

Таких уравнений по индексу i будет всего n, и мы можем их разрешить относительно n величин $\ddot{x}^{\mu}$. Получаем:

$$\ddot{x}^k + \sum_{\mu, \nu} \begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ & i \end{Bmatrix} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0.$$

Это и будут дифференциальные уравнения геодезических линий, т.-е. линий кратчайших расстояний в n-мерном пространстве.

Сравним полученные нами уравнения с теми, которые мы получили в § 181, стр. 246, и предположим, что вектор $A^k = \dot{x}^k$ и что он, оставаясь

параллельным самому себе, передвигается по тому же направлению dx^k. Тогда мы получим для изменения этого вектора

$$d(\dot{x}^k) = \sum_{\mu\nu} \Gamma^{i}_{\mu\nu}\, dx^\mu \dot{x}^\nu,$$

или (стр. 249, **182**)

$$\ddot{x}^k + \sum_{\mu,\nu} \begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ & i \end{Bmatrix} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,$$

т.-е. ту же геодезическую линию.

Отсюда мы заключаем, что линии имеют следующие свойства:

1) Геодезическая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками.

2) Геодезическая линия может быть получена движением элемента дуги ds вдоль самого себя, т.-е. передвижением вектора $d\mathfrak{s}$ параллельно самому себе на длину $d\mathfrak{s}$.

Совершенно такими же свойствами, как мы знаем, обладают *прямые линии* в эвклидовом пространстве.

185. Пример. На поверхности шара (двухмерное пространство) проведем меридианы и параллели, и пусть координатами какой-либо точки P служат углы — долгота φ и полюсное расстояние ϑ (географическая широта равна $90^\circ - \vartheta$). Элемент дуги на поверхности шара при $r = 1$ выразится через φ и ϑ так:

$$(ds)^2 = (\sin\vartheta\, d\varphi)^2 + (d\vartheta)^2.$$

Следовательно

$$g_{11} = \sin^2\vartheta,$$

$$g_{22} = 1,$$

$$g_{12} = 0,$$

$$|g_{ik}| = \sin^2\vartheta.$$

Заметим, что $g_{ik} = 0$, потому что мы выбрали *прямоугольную* систему координат.

Далее, все контравариантные составляющие метрического тензора g^{ik}, а также и их детерминант $|g^{ik}|$ суть обратные величины ковариантных составляющих.

Предлагаем читателю самому убедиться в том, что все

$$\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ & i \end{bmatrix} = 0,$$

за исключением

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \sin\vartheta\cos\vartheta;$$

все

$$\begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ i \end{Bmatrix} = 0,$$

за исключением

$$\begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \cot\vartheta,$$

$$\begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Уравнения геодезической линии будут, следовательно,

$$\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\,.\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + 2\cot\vartheta\,.\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = 0.$$

Эти уравнения можно, конечно, получить и непосредственно, приравнивая

$$\delta\int_1^2 \sqrt{(\sin\vartheta\, d\varphi)^2 + (d\vartheta)^2} = 0.$$

Геодезические линии будут здесь большие круги. Предоставляем это доказать читателю.

186. Тензор кривизны. В § **181**, стр. 246, мы вывели формулу для изменения вектора A^i (т.-е. его составляющих) при перемещении его параллельно самому себе на длину dx^k и получили:

$$dA^i = \sum \Gamma^i_{k\alpha}\, dx^\alpha A^k.$$

Если обойти вектором A^i бесконечно малый замкнутый контур (вычислить $\operatorname{curl} A^i$), то, придя в исходную точку, мы можем, вообще говоря, и не получить $dA^i = 0$; вектор может притти с другими составляющими.

Для того чтобы уяснить себе, каким образом вектор при обходе замкнутого контура, оставаясь все время параллельным самому себе и

тем не менее придя в исходную точку, может оказаться изменившим свое направление, рассмотрим следующий наиболее простой пример.

На поверхности шара (кривое двухмерное пространство) начертим сферический прямоугольный треугольник (рис. 127), составленный

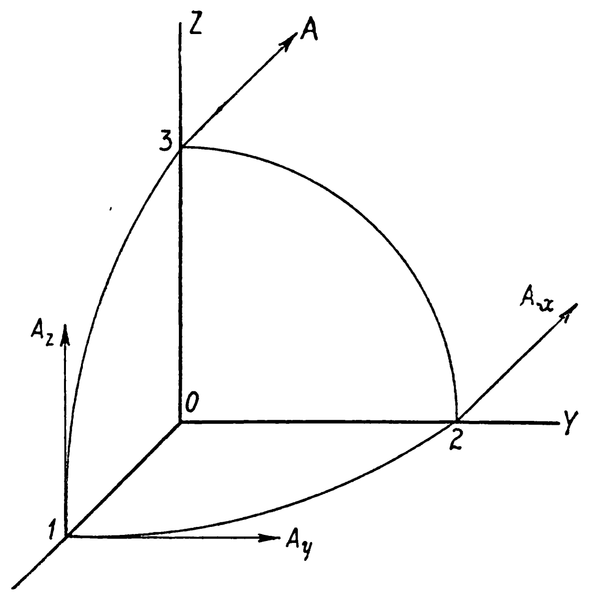


Рис. 127.

из двух перпендикулярных друг к другу меридианов (12) и (23) и четверти экватора (12).

Этот замкнутый контур составлен из трех геодезических линий шаровой поверхности.

Пусть некоторый вектор A имеет в точке (1) направление по экватору, и, следовательно, его составляющие по экватору (e) и меридиану (m) будут равны:

$$A_e = A_y; \qquad A_m = 0$$

Передвинем вектор A в точку (2) по поверхности нашего шара и притом так, чтобы он все время оставался параллельным самому себе. Согласно нашему определению (стр. 244, **181** и стр. 257, **184**)

параллельное перемещение означает неизменность составляющих вектора по геодезическим линиям во всех точках пути данного вектора; иначе говоря, вектор A при своем параллельном движении должен во все время сохранять один и тот же угол с геодезическими линиями. При таком условии вектор A_y, сохраняя все время свое направление по экватору, придет в точку (2) с направлением A_x (на рис. 127 в трехмерном пространстве это будет направление по $-x$), которое образует с меридианом (23) прямой угол. Этот прямой угол вектор A должен сохранять и при своем дальнейшем движении по линии (23) до точки (3). В точке (3) вектор A оказался направленным по меридиану (13) и при движении по этому меридиану должен опять оставаться себе параллельным, т.-е. сохранять свое направление по меридиану. В таком случае, придя в точку (1), т.-е. в свою исходную точку, он будет иметь составляющие по экватору и по меридиану

$$A_e = 0; \qquad A_m = A_y.$$

Отсюда мы видим, что, хотя вектор во все время своего движения перемещался параллельно самому себе (относительно геодезических линий нашего кривого двухмерного пространства), тем не менее, придя в исходную точку, он оказался повернутым на 90°; его составляющие уже другие ($dA \neq 0$).

На плоскости, т.-е. в эвклидовом двухмерном пространстве, параллельное перемещение вектора (относительно прямых линий) по любому замкнутому пути не может изменить его составляющих. Мы можем сказать, что в эвклидовом пространстве параллельное перемещение однозначно ($dA = 0$).

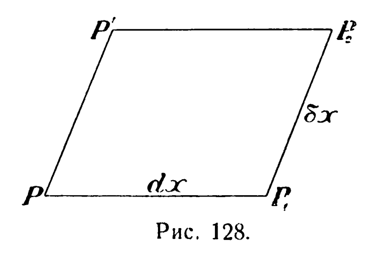


Рис. 128.

Разберем теперь общий случай.

Пусть вектор A^i переходит по пути dx (рис. 128) из точки P в P_1 и затем по пути δx в точку P_2. В точке P_1 вектор A^i будет иметь составляющие

$$B^i = A^i + dA^i,$$

а, придя в точку P_2, будет иметь составляющие

$$C^i = A^i + dA^i + \delta(A^i + dA^i).$$

Изменение вектора при переходе из точки P в точку P_2 будет, следовательно, равно:

$$\Delta A^i = C^i - A^i = dA^i + \delta A^i + \delta(dA^i).$$

При этом

$$\delta(dA^i) = \sum_{k,\lambda} d\Gamma^i_{k\lambda}\, \delta x^\lambda A^k + \sum_{k\lambda} \Gamma^i_{k\lambda}\, \delta x^\lambda dA^k.$$

Если итти в точку P_2 по пути $PP'P_2$, то получим такое же выражение, только знаки δ и d переменятся местами.

Разность этих двух выражений и дает нам изменение вектора A^i для всего замкнутого пути $(PP_1P_2P'P)$

$$\Delta A^i = \sum_{k\lambda} \left(d\Gamma^i_{k\lambda}\, \delta x^\lambda - \delta\Gamma^i_{k\lambda}\, dx^\lambda\right) A^k + \Gamma^i_{k\lambda}\, (\delta x^\lambda \delta A^k - dx^\lambda \delta A^k).$$

Здесь мы можем подставить

$$d\Gamma^i_{k\lambda} = \sum_\rho \frac{\partial \Gamma^i_{k\lambda}}{\partial x^\rho}\, dx^\rho; \qquad dA^k = \sum_{\rho\sigma} \Gamma^k_{\rho\sigma}\, dx^\rho A^\sigma$$

и получим:

$$\Delta A^i = \sum_{k,\rho,\sigma} R^i_{k\rho\sigma}\, dx^\rho dx^\sigma\, A^k,$$

где

$$R^i_{k\rho\sigma} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{k\sigma}}{\partial x^\rho}\right) - \frac{\partial \Gamma^i_{k\rho}}{dx^\sigma}\Bigg) + \sum_\lambda \left(\Gamma^i_{\lambda\sigma}\, \Gamma^\lambda_{k\rho} - \Gamma^i_{\lambda\rho}\, \Gamma^\lambda_{k\sigma}\right),$$

при чем

$$i,\ k,\ \rho,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Этот смешанный тензор четвертого порядка называется тензором кривизны n-мерного пространства. Его формула была дана впервые Риманом, как обобщенное понятие о кривизне поверхностей (т.-е. двухмерного пространства), введенное Гауссом.

Если $R^i_{k\rho\sigma}$ везде равен нулю, то изменение вектора A^i при его параллельном перемещении по *замкнутому* пути равно нулю, а изменение dA^i между двумя точками поля не зависит от пути перемещения. Значит, если тензор $R^i_{k\rho\sigma} = 0$, то всегда можно найти такую координатную систему, чтобы $\Gamma^i_{\rho\sigma} = 0$, т.-е. чтобы g_{ik} были

постоянны. Это и есть свойство эвклидовой геометрии в прямоугольных координатах.

Из смешанного тензора $R^i_{k\rho\sigma}$ можно путем сокращения по индексам i и σ получить ковариантный тензор второго порядка. Далее, мы можем превратить этот тензор в $R^\rho{}_k$, смешанный, по формуле:

$$R^\rho_k = \sum_\rho g^{i\rho} R_{k\rho}.$$

При вторичном сокращении при $k = \rho$ получаем скалар.

187. Обобщение Вейля. Мы уже указывали (§ **181**, стр. 248), что введенная нами *метрика* пространства, т.-е. формула, по которой определяется скалярная величина вектора по его составляющим, а именно, что формула

$$(\mathbf{A})^2 = \sum_{ik} g_{ik} A^i A^k$$

допускает еще большее обобщение. У нас величины g_{ik} определялись единичными векторами **e** по осям координат. Векторы **e** в криволинейных координатах не были постоянны, а сами были функциями координат, и в зависимости от **e** изменялись и g_{ik}. Вейль предложил еще более обобщить это, приняв, что единица измерения скалярной величины вектора тоже может быть функцией координат. Следовательно, по Вейлю, мы должны предположить, что

$$(\mathbf{A})^2 = \lambda^2(x^i) \sum_{ik} g_{ik} A^i A^k.$$

Мы только вкратце наметим следствия, вытекающие из обобщения Вейля.

Вышедоказанные теоремы о параллельном перемещении вектора несколько изменятся.

Прежде всего заметим, что $\lambda(x^i)$ в вышенаписанной формуле может быть любая произвольно заданная функция координат. Поэтому определение скалярной величины вектора по этой формуле не имело бы никакого практического значения, если бы не ввели больше никаких добавочных условий. Действительно, если бы при одной форме функции λ вектор **A** при каком-либо параллельном перемещении остался себе равным, то стоит только дать другую функцию λ,

и тот же вектор при том же смещении оказался бы измененным. Для того чтобы избежать этого произвола и чтобы равные векторы в двух соседних точках оставались равными при любой заданной функции λ, мы должны ввести добавочное условие. Условимся мерить векторы масштабом, который сам был бы функцией координат. Эту последнюю функцию мы условимся выбирать сообразно с функцией λ и притом так, чтобы равные векторы в двух соседних точках поля оставались равными при любой функции λ.

Итак, положим сперва, что $\lambda = 1$ и что некоторый вектор A^i переместился параллельно самому себе из точки P в соседнюю точку P', при чем $dA^i = 0$. В таком случае скалярная величина этого вектора, т.-е. длина его $\bar{l}$, не изменилась

$$d\bar{l} = 0.$$

Введем теперь множитель λ, и пусть он будет некоторой функцией координат. Тогда длина вектора изменится и будет равна:

$$l = \lambda \bar{l}.$$

Изменение этой длины при том же самом перемещении будет равно:

$$dl = d\lambda\, \bar{l} + \lambda d\bar{l}.$$

А приняв во внимание, что $d\bar{l}$ равно нулю, можем написать:

$$dl = d\lambda\, \bar{l} = \frac{d\lambda}{\lambda} l.$$

Относительное удлинение будет:

$$\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{d\lambda}{\lambda} = d(\lg \lambda).$$

Если функцию $\lambda(x^i)$ оставить произвольной, но зато условиться измерять векторы в различных точках поля различными масштабами и притом так, чтобы скалярная величина сместившегося вектора A все же оставалась одна и та же, то, очевидно, для этого надо выбрать переменный масштаб тоже с относительным удлинением ε. При таком масштабе два равных и параллельных вектора в двух соседних точках останутся равными при любом множителе $\lambda(x^i)$.

Таким образом мы установили между соседними точками поля, кроме *аффинной* связи еще и *метрическую* связь. Другими словами, мы не только условились, что подразумевать под параллельным перемещением неизменного вектора, но и условились, как измерять его скалярную величину, чтобы при любой функции $\lambda(x^i)$ она всегда оставалась одна и та же.

Величину ε можно представить как функцию смещения dx^i, и так как это смещение предполагается бесконечно малым, то это будет линейная функция

$$\varepsilon = \sum_i \varphi_i dx^i.$$

Легко видеть, что

$$\varphi_i = \frac{\partial}{\partial x^i} (\lg \lambda).$$

Но это еще не все. Принятое нами изменение масштаба не при всякой метрике будет полным дифференциалом. Это означает, что при движении вектора по двум разным путям от точки P до точки P_2 (ср. стр. 259) его изменения dA^i могут оказаться разными; или, что то же самое, при движении вектора по *замкнутому* пути, dA^i может и не равняться нулю.

Легко видеть, что при предположении Вейля, кроме тех изменений, о которых мы говорили выше и которые привели нас к тензору $R^i_{k\rho\sigma}$, мы при обходе замкнутой кривой получим еще тензор

$$W_{\rho\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x^\rho}.$$

В тех случаях, когда этот тензор равен нулю, мы приходим к римановской метрике; а если еще и тензор $R^i_{k\rho\sigma} = 0$, то мы возвращаемся к эвклидову пространству.

ЛИТЕРАТУРА.

Список книг по теории поля читатель может найти в L. Graetz. Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, том IV стр. 1138.

Теория векторов излагается в курсах механики, теория потенциального поля — в теории притяжений, теория вихревого поля — в гидродинамике и электродинамике.

Рекомендуем читателю познакомиться с курсами математики: по теории дифференциальных уравнений с частными производными и по вариационному исчислению.

Аналитическую теорию поля *n* измерений можно найти в книгах по теории относительности Эйнштейна, список которых дан в книге:

W. Pauli jun. Relativitätstheorie. 1921.

В самое последнее время в Германии вышел целый ряд книг по математическим основам теоретической физики, в которых излагается между прочим и теория поля; однако большинство из них имеют справочный характер Я считаю достаточным указать на новую переработку Ph. Frank und A. Mieses известной книги:

Rieman-Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, I & II.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Показаны номера страниц.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Эта первая часть „Курса теоретической физики“ посвящена, главным образом, „теории поля“.

Обыкновенно теория поля излагается в курсах теоретической физики в связи с теорией притяжений, в гидродинамике или в электродинамике. В этом курсе я решил выделить теорию поля в особую часть по следующим причинам.

Во-первых, теория поля, по моему мнению, представляет собою в настоящее время главное зерно всей теоретической физики. Каждое физическое явление, происходящее в пространстве и во времени, уже образует поле.

Во-вторых, теория поля лежит на границе между физикой и геометрией, и те трудности, которые приходится преодолевать при изучении геометрии поля, сами по себе достаточно велики, и их не следовало бы примешивать к тем трудностям, которые присущи самим физическим теориям.

В-третьих, выделяя теорию поля, мы отчасти избегаем повторения выводов одних и тех же теорем в различных отделах теоретической физики.

Наконец, *в-четвертых*, мною руководило еще следующее соображение: может быть, для некоторых из читателей окажется достаточным изучение этой первой части теоретической физики для того, чтобы, не дожидаясь появления других частей, перейти непосредственно к чтению специальных сочинений. В таком случае я надеюсь, что это руководство, в котором собраны главнейшие основы теоретической физики и где обращено особое внимание на наглядность изложения, может оказать существенную услугу.

Книга эта разделена на три главы.

Глава I содержит в себе главнейшие правила векторного исчисления. Она изложена кратко; в основу ее положены, главным образом, геометрические, а не аналитические соображения. Эту главу

ПОСОБИЯ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

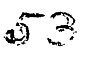
А. А. ЭЙХЕНВАЛЬД

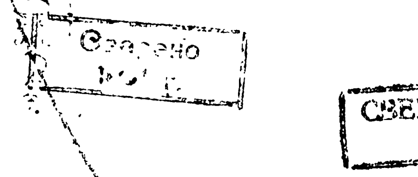
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета рекомендовано в качестве руководства для физматов и пособия для втузов

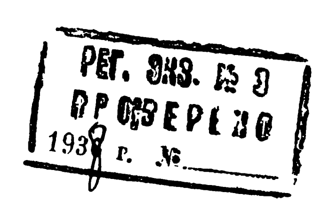


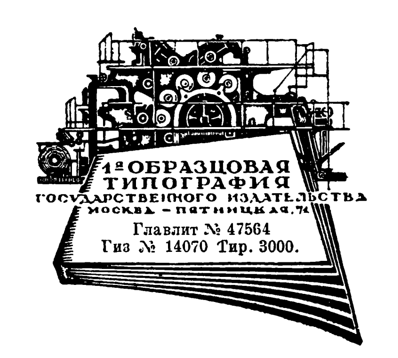






ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ★ 1926 ★ ЛЕНИНГРАД




1-я ОБРАЗЦОВАЯ
ТИПОГРАФИЯ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ИЗДАТЕЛЬСТВА
МОСКВА — ПЯТНИЦКАЯ, 71
Главлит № 47564
Гиз № 14070 Тир. 3000.

ПОСОБИЯ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

А. А. ЭЙХЕНВАЛЬД

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1 9 2 6